

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**

**FLAVIA VIVIANI TORMENA**

**UM MODELO DE REMODELAMENTO ÓSSEO UTILIZANDO POTENCIAIS  
TERMODINÂMICOS GENERALIZADOS**

**CURITIBA  
2009**

**FLAVIA VIVIANI TORMENA**

**UM MODELO DE REMODELAMENTO ÓSSEO UTILIZANDO POTENCIAIS  
TERMODINÂMICOS GENERALIZADOS**

**Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
em Métodos Numéricos em Engenharia –  
PPGMNE, Setor de tecnologia da Universidade  
Federal do Paraná, como requisito parcial à  
obtenção do título de Doutor em Ciências, área de  
concentração em Mecânica Computacional.**

**Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Mildred Ballin Hecke**

**Co-orientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone  
Machado**

**CURITIBA  
2009**

## TERMO DE APROVAÇÃO

FLAVIA VIVIANI TORMENA

### UM MODELO DE REMODELAMENTO ÓSSEO UTILIZANDO POTENCIAIS TERMODINÂMICOS GENERALIZADOS

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – PPGMNE, Setor de tecnologia da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:



Prof.ª Dr.ª Mildred Ballin Hecke (Orientadora)

Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – PPGMNE, UFPR



Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado (Co-orientador)

Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – PPGMNE, UFPR

PARTICIPAÇÃO POR VIDEOCONFERÊNCIA

Prof.ª Dr.ª Lídia Maria Rodrigues Carvalho

Universidade de Aveiro - Portugal



Prof. Dr. Néstor Alberto Zouain Pereira

Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ



Prof. Dr. Osvaldo Luís Manzoli

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP

PARTICIPAÇÃO POR VIDEOCONFERÊNCIA

Prof. Dr. Sérgio Persival Baroncini Proença

Universidade de São Paulo – Escola de Engenharia de São Carlos

Curitiba, 07 de julho de 2009

Aos meus pais, Anísio e Ilda,  
aos meus irmão Moema, Júnior e Aninha  
e a minha sobrinha Helena.

## **AGRADECIMENTOS**

À professora doutora Mildred Ballin Hecke, orientadora da tese, pelo apoio, incentivo, dedicação, compreensão, carinho e amizade ao longo de tantos anos.

Ao professor doutor Roberto Dalledone Machado, co-orientador da tese, por toda a sua contribuição.

Aos professores do PPGMNE, à Maristela e aos amigos do CESEC, pela amizade e apoio em todos os momentos.

Ao amigo Emílio em especial, pela ajuda incansável, dedicação e implementação do programa.

Aos meus pais Anísio e Ilda e aos meus irmãos Moema, Aninha e Júnior, pelo incentivo e carinho.

Ao meu namorado Marcelo, pelo estímulo, compreensão e amor.

Aos amigos do grupo de Bioengenharia da UFPR, pelo empenho e solidariedade.

A todos os meus amigos, pela torcida, carinho e força.

Ao Cláudio M. Krüger, meu amigo e coordenador na Universidade Positivo pela colaboração e incentivo.

A Deus, por estar sempre comigo iluminando minha vida.

“Valeu a pena? Tudo vale a pena  
Se a alma não é pequena.  
Quem quiere passar além do Bojador  
Tem que passar além da dor.  
Deus ao mar o perigo e o abysmo deu,  
Mas nelle é que espelhou o céu”.  
(Fernando Pessoa)

## RESUMO

Os ossos são os elementos responsáveis pela sustentação do corpo e uma das suas principais características é a capacidade de auto-adaptação, que consiste em modificar constantemente, ao longo de toda a vida, sua microestrutura. O processo que determina esta modificação é chamado de remodelação interna e muitos são os mecanismos e os estímulos mecânicos e fisiológicos, que o governam. Estes estímulos não estão completamente compreendidos mas, pode-se afirmar que o microdano é um dos principais estímulos para o processo de remodelação. A partir dessa constatação foi proposta a utilização do formalismo da termodinâmica, amplamente utilizado para os metais e para problemas que envolvem a mecânica do dano, para descrever os processos de remodelação óssea. Neste trabalho são utilizados Potenciais Termodinâmicos que vão gerar as Leis de Estado, baseados em variáveis internas escalares, além de Potenciais de Dissipação, que vão determinar a evolução das variáveis ao longo do tempo, fazendo-se uso da Análise Convexa. As equações constitutivas são solucionadas por algoritmos da Programação Matemática e a implementação numérica dessa teoria utiliza o Método dos Elementos Finitos na discretização espacial. São implementados dois programas, denominados REMOLD 1D e REMOLD 2D, que determinam o processo de remodelação óssea para problemas unidimensionais e bidimensionais, respectivamente. A vantagem de se utilizar esse formalismo é a obtenção de um modelo capaz de incorporar diversas características do fenômeno, e que, seguramente, não viola as Leis da Termodinâmica.

Palavras-chave: Remodelamento ósseo, Termodinâmica, Variáveis internas escalares, Análise convexa, Programação matemática.

## **ABSTRACT**

The bones are the elements responsible to support the body and one of their main characteristics is the capability of self adaptation, that consists in continuous changes in their micro-structure during life-time. The process responsible for this modification is called internal remodelling and there are many mechanisms and physiological and mechanics stimulus that control this process. This stimulus are not completely understood, but it can be said that the micro-damage is one of the most important stimulus for the process of remodeling. From this statement was proposed the utilization of the formal rules of thermodynamics, widely used for metals and for problems related with mechanical of damage, to describe the process of bones remodeling. In this work are used the thermodynamics potentials that will generate the laws of state, based on internal scalar variables, also dissipation potentials that will determinate the evolution of the variables during the time, making use of convex analysis. The constitutive equations are solved with mathematical programming algorithms and the numerical implementation of this theory uses the Finite Elements Method to spatial discretization. Two programs, named REMOLD 1D and REMOLD 2D, are implemented to determine the process of bone remodeling for one-dimensional and bidimensional problems, respectively. The advantages in the use of this formalism is the possibility of obtaining a model capable of including many characteristics of the phenomenon, that sorely , do not go against thermodynamics rules

Key-words: Bone remodeling, Thermodynamics, Internal scalar variables, Convex analysis, Mathematical programming.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Estrutura microscópica do osso cortical. (a) Esboço 3D do osso cortical; (b) corte do sistema Haversiano; (c) fotomicrografia do sistema Haversiano. ....	25
Figura 2.2 – Seção do osso mostrando osso trabecular e cortical. ....	26
Figura 2.3 – Diferenças entre osso trabecular e cortical.....	26
Figura 2.4 – Tipos de células ósseas. ....	27
Figura 2.5 – Esquema detalhado do processo de remodelamento ósseo. ....	29
Figura 2.6 – Esquema simplificado do processo de remodelamento ósseo. ....	29
Figura 2.7 – Esquema das relações entre microdano, remodelamento ósseo e fratura. ....	31
Figura 2.8 – Diferenças de densidade e anatomia em ossos trabeculares humanos (A) Vértebra (B) Tíbia proximal (C) Protuberância femoral maior (D) Pescoço femoral.....	32
Figura 2.9 – Diferença das fraturas para ossos (a) jovens (34 anos) e (b) velhos (85 anos). Os números acima das imagens representam a distância da imagem a partir da ponta (nominal) da trinca. ....	33
Figura 2.10 – Curvas tensão-deformação para ossos trabeculares tibiais proximais bovinos. ....	36
Figura 2.11 – Curvas tensão-deformação para ossos trabeculares vertebrais humanos.....	37
Figura 2.12 – Relação entre densidade aparente e módulo de elasticidade. ....	38
Figura 2.13 – Diagrama tensão-deformação para o ensaio de torção (T). ....	41
Figura 2.14 – Diagrama tensão-deformação para o ensaio de tração (UT).....	42
Figura 2.15 – Diagramas tensão-deformação para os ensaios de compressão uniaxial (UC) e multiaxial (MC). ....	42

Figura 2.16 – Imagens de fissuração provocada em ensaio de flexão para (A) região comprimida e (B) região tracionada.....	43
Figura 2.17 – Microdano difuso que aparece no osso alveolar, sob transmissão de luz: (A) do lado bucal não tratado no 1º dia; (B) do lado lingual não tratado no 2º dia; (C) do lado bucal tratado no 2º dia. A barra indica 50 $\mu\text{m}$ . ....	44
Figura 2.18 – Curvas carga-deslocamento para ossos corticais umerais humanos de três doadores. ....	45
Figura 2.19 – Foto-micrografia de seções da ulna de fêmeas de ratos. ....	46
Figura 2.20 – Deformação ou tensão aplicada para o número de ciclos de carga no equilíbrio do remodelamento. ....	49
Figura 2.21 – Função taxa linear (pontilhado, para equação (2.22)), e função taxa linear por partes com zona morta (contínuo, para equação (2.23))....	50
Figura 2.22 – Área de superfície específica ( $S_v$ ). ....	51
Figura 2.23 – Critério de remodelamento empregado por Beaupré et al. (1990). ....	59
Figura 2.24 – Taxa de remodelamento ósseo como função do estímulo mecânico. ....	62
Figura 2.25 – Adaptação do osso proposta de acordo com a regra de mecano-regulação onde o remodelamento é governado por deformação e dano combinados. ....	78
Figura 2.26 – Adaptação do osso proposta de acordo com a regra de mecano-regulação onde a remodelação é governada por deformação ou dano, com dano priorizado quando $\omega > \omega_{crit}$ . ....	78
Figura 2.27 – Curva tensão-deformação: dano elasto-plástico e dano-reparação elasto-plástico. ....	85
Figura 2.28 – Esquema da adaptação óssea com a evolução da taxa da densidade aparente para duas situações distintas: (a) $d < d_{crit}$ e (b) $d > d_{crit}$ (reparação óssea). ....	94

Figura 2.29 – Esboço da relação tensão-deformação para o osso durante a (reabsorção óssea) e a (formação óssea). Em ambas as fases $d < d_{crit}$ .....	95
Figura 2.30 – Esquema contendo a relação tensão-deformação quando $d > d_{crit}$ ..	95
Figura 4.1 – Barra que simula uma trabécula óssea. ....	115
Figura 4.2 – Diagrama tensão-deformação para o material na fase inicial.....	118
Figura 4.3 – Função de remodelamento em termos de $\varepsilon_x$ e de $\alpha_d$ para a fase inicial. ....	119
Figura 4.4 – Função de remodelamento em termos de $\varepsilon_x$ e de $\alpha_h$ para a fase inicial. ....	119
Figura 4.5 – Diagrama tensão-deformação para o material na fase de perda de rigidez.....	120
Figura 4.6 – Função de remodelamento em termos de $\varepsilon_x$ e de $\alpha_d$ para a fase de perda de rigidez.....	121
Figura 4.7 – Contornos da função de remodelamento para a fase de perda de rigidez.....	122
Figura 4.8 – Diagrama tensão-deformação para o material na fase de ganho de rigidez.....	123
Figura 4.9 – Função de remodelamento em termos de $\varepsilon_x$ e de $\alpha_h$ para a fase de ganho de rigidez.....	124
Figura 4.10 – Contornos da função de remodelamento para a fase de ganho de rigidez.....	124
Figura 4.11 – Diagrama tensão–força termodinâmica com a indicação das regiões termodinamicamente admissíveis para o problema. ....	125
Figura 4.12 – Trabécula óssea composta por dois elementos. ....	126
Figura 4.13 – Definição de elementos e nós do modelo unidimensional.....	126
Figura 4.14 – Resultados dos diagramas tensão-deformação para o elemento 1 (A) e para o elemento 2 (B).....	128

Figura 4.15 – Evolução das variáveis internas ( $\alpha_d$ ) e ( $\alpha_h$ ) para o elemento 1 (A) e para o elemento 2 (B) ao longo dos passos de carga. ....	128
Figura 4.16 – Evolução do Módulo de Young para o elemento 1 (A) e para o elemento 2 (B) ao longo dos passos de carga. ....	129
Figura 4.17 – Resultados dos diagramas tensão-deformação para o elemento 1 (A) e para o elemento 2 (B) – dano inicial. ....	130
Figura 4.18 – Evolução das variáveis internas ( $\alpha_d$ ) e ( $\alpha_h$ ) para o elemento 1 (A) e para o elemento 2 (B) ao longo dos passos de carga – dano inicial. ....	130
Figura 4.19 – Evolução do Módulo de Young para o elemento 1 (A) e para o elemento 2 (B) ao longo dos passos de carga – dano inicial. ....	131
Figura 5.1 – Modelo de Elementos Finitos utilizado. ....	148
Figura 5.2 – Numeração utilizada para os nós (números menores) e para os elementos (números maiores) da malha de Elementos Finitos. ....	149
Figura 5.3 – Numeração de alguns pontos de Gauss da malha e ilustração da ordem desses pontos por elemento. ....	149
Figura 5.4 – Evolução da variável de perda de rigidez ( $\alpha_d$ ) para alguns passos de carga. ....	152
Figura 5.5 – Evolução da variável de ganho de rigidez ( $\alpha_h$ ) para alguns passos de carga. ....	153
Figura 5.6 – Evolução do Módulo de Young para alguns passos de carga. ....	155
Figura 5.7 – Evolução das deformações na direção x para alguns passos de carga. ....	156
Figura 5.8 – Evolução das deformações na direção y para alguns passos de carga. ....	157
Figura 6.1 – Fluxograma com o algoritmo simplificado dos programas. ....	159
Figura 6.2 – Fluxograma com o algoritmo da subrotina da função de remodelamento positiva. ....	160
Figura 6.3 – Fluxograma com a definição dos limites das variáveis de remodelamento. ....	161

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Relações empíricas entre densidade aparente e tensão de escoamento para ossos trabeculares bovinos. ....	35
Tabela 2.2 – Leis de regressão que relacionam as propriedades mecânicas dos ossos com a densidade aparente ( $\text{g/cm}^3$ ). ....	37
Tabela 2.3 – Médias e desvios-padrão para as propriedades dos ossos. ....	39
Tabela 2.4 – Parâmetros utilizados no algoritmo de remodelamento ósseo ....	76
Tabela 2.5 - Variáveis observáveis, cinemáticas e conjugadas.....	85
Tabela 2.6 – Comparação entre os modelos de remodelamento .....	96
Tabela 3.1 – Relações constitutivas e evolução das variáveis em termos de taxas.....	107
Tabela 3.2 – Relações constitutivas e evolução das variáveis em termos de incrementos.....	110
Tabela 4.1 – Dados utilizados no exemplo .....	127
Tabela 5.1 – Características do material e da geometria .....	148
Tabela 5.2 – Parâmetros da função de remodelamento.....	150

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\{A^d\}_i, \{A^h\}_j$	Conjunto de forças termodinâmicas associadas
$A^d$	Força termodinâmica de perda de rigidez
$A^h$	Força termodinâmica de ganho de rigidez
$A(\rho)$	Função que depende da densidade aparente
$\mathbf{b}_i$	Forças de corpo
$\mathbf{b}$	Força de corpo aplicada em um ponto no interior do domínio
$B(\rho)$	Constante que caracteriza o módulo de elasticidade dependendo da densidade aparente
$c$	Constante do remodelamento de Stanford
$c_e$	Taxa constante
$c_1^d, c_2^d, c_1^p, c_1^h, c_2^h$	Constantes
$\mathbf{C}$	Tensor de rigidez não-isotrópico
$C_e$	Constante que governa a relação entre o módulo de elasticidade e a densidade (MPa)
$C_i$	Constantes empíricas
$C_I$	Constante que governa a taxa de remodelamento em resposta ao estímulo de deformação
$C_{II}$	Constante que governa a taxa de remodelamento em resposta ao estímulo de dano
$d$	Variável escalar de dano
$d_i, h_i$	Autovalores dos tensores $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$
$\mathbf{ID}$	Tensor elástico de quarta ordem
$\mathbf{ID}_0$	Tensor elástico de quarta ordem para o material íntegro
$\mathbf{D}$	Tensor de dano
$\mathbf{D}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \mathbf{H}$	Variáveis tensoriais associadas aos mecanismos de dano, plasticidade e reparação
$e$	Medida da variação na fração de volume a partir de uma fração de volume de referência $\xi_0$
$e_e$	Erro do estímulo
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal (Módulo de Young)
$E_0$	Módulo de elasticidade longitudinal inicial do material
$\hat{E}$	Módulo de elasticidade do material isotrópico não danificado

$\mathbf{E}_T^{ep}, \mathbf{E}_T^{dh}$	Parcelas elasto-plástica e de dano-reparação do tensor de rigidez
$f$	Função de remodelamento
$f^j$	Critérios do problema de remodelamento
$f_i$	Parâmetros dos materiais
$f^d, f^p, f^h$	Potenciais de dissipação
$\mathbf{F}_{ik}$	Gradiente de deformação
$g$	Quantidade arbitrária
$g^d, g^h$	Critérios para o dano e a reparação
$g^r$	Critério para os processos de reabsorção ( $r$ )
$g^f$	Critério para os processos de formação ( $f$ )
$G, \lambda$	Constantes de Lamé
$\hat{G}, \hat{\lambda}$	Constantes de Lamé do osso compacto ideal com porosidade nula
$h^*$	Diferença de energia transferida devida à interação local entre a matriz e o perfusante
$\mathbf{H}$	Tensor de remodelamento
$\hat{\mathbf{H}}$	Tensor “ <i>fabric</i> ”
$I_1$	Primeiro invariante do tensor de tensões
$j$	Potencial de dissipação conjugado
$j_c$	Potencial de dissipação
$J$	Variação de volume local
$J_2$	Segundo invariante do tensor desviador de tensões
$\mathbf{J}$	Tensor que mede a influência relativa das partes esférica e desviadora do estímulo no critério de dano
$\mathbf{J}^D$	Tensor de quarta ordem característico do dano
$\mathbf{J}^H, \mathbf{H}^H$	Variáveis tensoriais que definem a forma da superfície de reparação
$k$	Razão entre a superfície disponível para remodelação e a superfície interna total
$k_t$	Parcela de dano
$K$	Densidade de energia cinética
$K_e$	Conjunto de constantes envolvidas no modelo isotrópico
$\mathbf{L}_{kk}$	Gradiente de velocidades

$m$	Taxa com a qual a massa por unidade de volume é adicionada ou removida da matriz de estrutura porosa
$m_p$	Expoente de ponderação do impacto da tensão relativa para o número de ciclos de carga
$m_T$	Massa de osso
$\mathbf{M}$	Tensor de dano efetivo
$n_i$	Número de ciclos para o caso de carga
$\mathbf{n}_i$	Autovetores dos tensores $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$
$N$	Número dos diferentes casos de carga em um dia
$N_f$	Número de ciclos necessários para a ruptura do material na tensão dada
$p$	Porosidade
$\mathbf{p}_i$	Força perfusante aplicada à matriz de estrutura porosa
$P$	Região admissível
$P_A$	Região da forças termodinâmicas admissíveis
$P_{ext}$	Potência mecânica externa
$\mathbf{q}$	Fluxo de temperatura
$\mathbf{Q}_k$	Vetor de fluxo de calor
$\dot{r}$	Taxa de remodelamento ósseo superficial
$R, \gamma, \phi$	Forças termodinâmicas associadas à evolução dos fenômenos de dano, plasticidade e reparação
$R^j(\rho)$	Termo do critério de remodelamento que envolve a densidade
$s$	Entropia específica
$S_v$	Área de superfície específica
$S_{deformação}^j$	Estímulo de remodelamento ósseo relacionado com a deformação
$S_{dano}^j$	Estímulo de remodelamento ósseo adaptativo do dano
$\mathbf{t}$	Vetor de tração aplicado em um ponto da superfície
$T$	Temperatura
$\mathbf{T}_{ki}$	Tensor de tensões de Cauchy
$u_{i,j}$	Deslocamento
$U$	Energia de deformação
$U_{ref}$	Estímulo de referência calculado
$U^j$	Densidade da energia de deformação



$\mathbf{v}$	Velocidade num ponto
$\mathbf{v}_i$	Velocidade do contínuo no tempo $t$
$V_B$	Volume do tecido ósseo
$V_T$	Volume de osso
$V_V$	Volume de vazios
$V^d, V^p, V^h$	Forças termodinâmicas associadas
$w$	Metade do intervalo da zona morta
$x_k$	Partícula material
$Y^\sigma$	Estímulo mecânico cuja variável independente é a tensão
$\mathbf{Y}$	Estímulo mecânico cuja variável independente é a deformação
$\mathbf{Y}^*$	Taxa de liberação da energia adaptativa para caracterizar as condições de carga/descarga do dano
$\mathbf{Y}^D, \mathbf{Y}^H$	Forças termodinâmicas relativas ao dano e a reparação
$\{\alpha_d\}_i, \{\alpha_h\}_j$	Variáveis internas utilizadas para descrever o ganho e a perda de rigidez
$\alpha$	Fração de cinza
$\alpha_d$	Variável interna de perda de rigidez
$\alpha_h$	Variável interna de ganho de rigidez
$\beta(\rho)$	Coefficiente da densidade aparente na equação do módulo de elasticidade
$\chi$	Função de dissipação
$\delta, p, \mu$	Variáveis escalares associadas aos mesmos mecanismos de dano, plasticidade e reparação
$\varepsilon$	Tensor de deformações
$\varepsilon^{ref}$	Deformação de referência
$\phi_0$	Variável que controla o início da reparação
$\phi$	Fração de volume ósseo na configuração deformada
$\phi^j(\varepsilon, C)$	Termo do critério de remodelamento que envolve a deformação
$\phi(\mu)$	Função de evolução da reparação
$\Phi$	Função da deformação elástica dependente dos tensores de dano e de reparação
$\gamma_0, \mathbf{R}_0$	Parcelas do dano e da plasticidade
$\gamma^j$	Multiplicadores de Lagrange

$\gamma$	Densidade do material que compõe a matriz óssea
$\Gamma$	Superfície externa
$\eta$	Entropia específica
$\varphi^d, \varphi^p, \varphi^h$	Variáveis internas associadas
$\mathcal{G}$	Eficiência do sistema
$\lambda$	Multiplicador de Lagrange
$\dot{\lambda}$	Parâmetro de consistência
$\dot{\lambda}^p, \dot{\lambda}^d, \dot{\lambda}^h$	Multiplicadores de Lagrange relacionados a plasticidade, dano e reparação
$\Lambda$	Lagrangeano
$\mu^r$	Parâmetro de consistência para a reabsorção
$\mu^f$	Parâmetro de consistência para a formação
$\nu$	Coeficiente de Poisson
$\nu(\rho)$	Coeficiente de Poisson que depende da densidade aparente
$\hat{\nu}$	Coeficiente de Poisson do material isotrópico não danificado
$v_i$	Velocidade do contínuo
$\Pi$	Função escalar que expressa a evolução das variáveis inelásticas
$\theta$	Temperatura local
$\Theta(\rho)$	Parcela da energia interna associada a variação de densidade
$\rho$	Densidade aparente
$\rho_t$	Densidade do tecido ósseo
$\rho_{\min}$	Limite inferior da densidade aparente
$\rho_{\max}$	Limite superior da densidade aparente
$\hat{\rho}$	Densidade máxima do osso ideal com porosidade nula
$\sigma$	Tensor de tensões
$\sigma_0$	Tensão que referencia o início do remodelamento
$\sigma_c$	Tensão limite de compressão
$\sigma_{ult}$	Tensão última de compressão
$\tilde{\sigma}$	Tensão efetiva
$\bar{\sigma}$	Tensão no contínuo
$\bar{\sigma}_t$	Tensão no tecido
$\sigma^j$	Tensão cíclica (MPa)

$\zeta$	Densidade de energia interna
$\omega$	Dano acumulado
$\omega_d$	Medida da anisotropia
$\hat{\omega}_d$	Tensor que depende da medida da anisotropia ( $\omega$ )
$\omega_{crit}$	Dano crítico
$\Omega$	Região
$\xi$	Fração de volume ósseo na configuração de referência indeformada
$\xi^d$	Fração de volume ósseo efetiva na configuração de referência indeformada
$\Xi$	Potencial de dissipação mecânica
$\Xi^P, \Xi^D, \Xi^H$	Funções de dissipação relacionadas aos processos de plasticidade, dano e reparação
$\psi$	Potencial Densidade de Energia Livre de Helmholtz
$\psi_c$	Potencial Densidade de Energia Livre de Gibbs (potencial complementar)
$\Psi$	Estímulo diário de tensão
$\Psi_t^*$	Estímulo de equilíbrio no tecido
$\mathfrak{I}^i$	Espaços dos domínios correspondentes ao dano, a plasticidade e a reparação, com $i = (d, p, h)$
:	Produto escalar entre dois tensores ( $\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{R}_{ij}$ ).
.	Produto entre dois tensores ( $\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{Q}_{ik} \mathbf{R}_{kj}$ ).
•	Produto escalar entre dois tensores
$\otimes$	Produto diádico

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>19</b>
1.1	OBJETIVOS .....	21
1.2	JUSTIFICATIVA .....	22
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	22
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA.....</b>	<b>24</b>
2.1	TECIDO ÓSSEO .....	24
2.2	REMODELAÇÃO ÓSSEA .....	27
2.3	PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS OSSOS .....	31
2.3.1	Caracterização de ossos proposta por Jacobs (1994).....	34
2.3.2	Caracterização de ossos proposta por Keaveny et al. (1994) e Keaveny et al. (1999).....	35
2.3.3	Caracterização de ossos proposta por Kopperdahl e Keaveny (1998).....	36
2.3.4	Caracterização de ossos proposta por Hazelwood et al. (2001) e por Hernandez et al. (2001) .....	39
2.3.5	Caracterização de ossos proposta por Doblaré, García e Gómez (2004) ...	40
2.3.6	Caracterização de ossos proposta por Rincón-Kohli e Zysset (2008) .....	41
2.4	MODELOS DE REMODELAÇÃO ÓSSEA.....	47
2.4.1	Modelo Isotrópico de Stanford .....	48
2.4.2	Modelo Anisotrópico de Stanford .....	52
2.4.3	Modelo proposto por García, Doblaré e Cegoñino.....	60
2.4.4	Modelo proposto por Doblaré e García.....	64
2.4.5	Modelo proposto por Ramtani e Zidi .....	66
2.4.6	Modelo proposto por McNamara e Prendergast .....	74
2.4.7	Modelo proposto por Barbero, Greco e Lonetti .....	79
2.4.8	Modelo proposto por Souza.....	92
2.4.9	Comparação entre os modelos de remodelamento descritos .....	96
<b>3</b>	<b>PROPOSTA DE MODELO CONSTITUTIVO PARA A REMODELAÇÃO ÓSSEA UTILIZANDO VARIÁVEIS INTERNAS ESCALARES .....</b>	<b>99</b>
3.1	VARIÁVEIS DE ESTADO .....	101
3.2	LEIS DE EVOLUÇÃO.....	103

3.3	FORMULAÇÃO EM TAXAS PARA AS EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS DE DANO-REMODELAÇÃO .....	105
3.4	FORMULAÇÃO EM INCREMENTOS PARA AS EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS DE DANO-REMODELAÇÃO .....	108
<b>4</b>	<b>FORMULAÇÃO PROPOSTA PARA O CASO UNIDIMENSIONAL.....</b>	<b>112</b>
4.1	FORMULAÇÃO UNIDIMENSIONAL COM VARIÁVEIS INTERNAS ESCALARES DE GANHO E PERDA DE RIGIDEZ .....	113
4.2	EXEMPLO UNIDIMENSIONAL DE TRABÉCULA ÓSSEA COM DENSIDADE INDEPENDENTE DAS VARIÁVEIS INTERNAS .....	115
4.2.1	Fase inicial do material .....	118
4.2.2	Fase de perda de rigidez do material.....	120
4.2.3	Fase de ganho de rigidez do material.....	122
4.3	EXEMPLO UNIDIMENSIONAL DE BARRA QUE REPRESENTA UMA AMOSTRA DE OSSO...	125
<b>5</b>	<b>FORMULAÇÃO PROPOSTA PARA O CASO BIDIMENSIONAL .....</b>	<b>133</b>
5.1	FORMULAÇÃO BIDIMENSIONAL COM VARIÁVEIS INTERNAS ESCALARES DE PERDA E GANHO DE RIGIDEZ .....	133
5.1.1	Função de remodelamento adaptada para o critério de Von Mises.....	137
5.1.2	Função de remodelamento adaptada para o critério de Mohr-Coulomb....	138
5.1.3	Função de remodelamento adaptada para o critério de Drucker-Prager ...	139
5.1.4	Função de remodelamento adaptada para o critério de Ottosen.....	140
5.1.5	Função de remodelamento adaptada para o critério de Tsai-Wu .....	141
5.2	FORMULAÇÃO GERAL COM VARIÁVEIS INTERNAS ESCALARES PARA COMPORTAMENTO DIFERENCIADO NA TRAÇÃO E NA COMPRESSÃO .....	143
5.3	EXEMPLO DE REMODELAMENTO EM UMA BARRA CONSIDERANDO O ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES .....	147
<b>6</b>	<b>PROGRAMAS REMOLD 1D E REMOLD 2D .....</b>	<b>158</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>162</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>160</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os ossos são responsáveis pela rigidez e pela resistência estrutural global, e estão diretamente relacionados com a sustentação do corpo. Os outros tecidos que compõem o corpo transmitem as cargas do uso cotidiano, ou provocadas por algum acidente, para os ossos.

A capacidade auto-adaptativa do osso é uma das características mais importantes do seu comportamento e consiste em modificar sua microestrutura e suas propriedades de acordo com o ambiente mecânico.

O osso pode crescer, modificar-se e renovar-se durante toda a vida por meio de um processo permanente chamado de remodelação interna (DOBLARÉ, GARCÍA e GÓMEZ, 2004).

O osso é um material de comportamento anisotrópico, cujos valores e as direções principais da rigidez mudam, não apenas ponto a ponto, mas também no tempo, como resultado do processo de remodelamento. Ainda assim, muitos modelos de remodelação consideram uma distribuição da massa óssea uniforme em todas as direções, resultando em um comportamento isotrópico quando se inicia de um estado isotrópico (DOBLARÉ e GARCÍA, 2002).

De acordo com McNamara e Prendergast, (2007) os mecanismos regulatórios que governam o efeito da tensão mecânica na ação de remodelação óssea e os estímulos que causam a resposta celular nas células mecano-sensitivas, ainda não estão completamente compreendidos.

O trabalho de Lee<sup>1</sup> (1997, citado por Ramtani, García e Doblaré, 2004) mostra que o processo de adaptação óssea devido à alteração das cargas aplicadas, é precedido pelo aumento significativo da incidência de microfissuras adjacentes às regiões de modelação e remodelação óssea. A partir desta constatação, o microdano passa a ser considerado um dos estímulos mais importantes do remodelamento ósseo e são apresentadas várias propostas para considerar a carga mecânica como uma resposta adaptativa, principalmente para a deformação e o dano.

---

<sup>1</sup> LEE, T. C. **Detection and accumulation of microdamage in bone**. Dublin, 1997. MD Thesis. University of Dublin.

Segundo Verna et al. (2004), o microdano pode ser classificado em: (1) microfissuras, comumente encontradas em ossos corticais, se estendem por aproximadamente 100  $\mu\text{m}$ ; (2) dano difuso, mais encontrado no nível trabecular, aparece como um padrão de manchas mais intensas na matriz mineralizada, por causa de deformações elevadas; (3) fissuras de padrão cruzado, que são pequenas fraturas que ocorrem nas trabéculas, formando uma malha; (4) microfraturas, que ocorrem quando a estrutura trabecular encontra-se completamente fraturada.

O formalismo determinado pela aplicação dos conceitos da termodinâmica e por consequência, sua implementação numérica via algoritmos de otimização, vem sendo utilizados com sucesso para os metais, conforme Hecke (1991), e para os problemas que envolvem a Teoria de Dano, conforme Lemaitre (1996), Murakami e Kamiya (1997) e Benallal (2000). Com base nessas aplicações foi realizada uma tentativa de utilizar o mesmo formalismo para descrever o processo do remodelamento ósseo.

No desenvolvimento da formulação foram utilizadas técnicas da análise convexa, cuja aplicação à modelação termomecânica dos materiais é encontrada nos trabalhos de Hecke (1991), Han e Reddy (1999), Ncheuguim (2006), Houlsby (2002), Reddy e Martin (1991), Hjiiaj, Fortin e de Saxcé (2003), Fancello, Ponthot e Stainer (2005), Fancello et al. (2006), Feijóo (1991) e Feijóo e Zouain (1987,1988).

É importante salientar que o presente trabalho é parte de um trabalho maior, realizado pelo grupo de Bioengenharia da Universidade Federal do Paraná, que envolve profissionais de diversas áreas, em parceria com o GIBUA – Grupo de Investigação em Biomecânica da Universidade de Aveiro (HECKE et al. 2007, CARVALHO et al. 2007).

O modelo de remodelamento ósseo proposto tem início com a escolha das Variáveis de Estado e com a determinação dos Potenciais Termodinâmicos que vão gerar as Leis de Estado.

Para descrever como as Variáveis de Estado evoluem no tempo será proposto um Potencial de Dissipação, que permite que as equações constitutivas sejam determinadas em função de taxas.

Como uma analogia da plasticidade clássica, onde se define uma função de plastificação para delimitar as tensões elásticas, pode-se pensar em funções “de escoamento” (denominadas neste trabalho de funções de remodelamento) associadas a perda e a formação óssea, que definem uma região de forças

termodinâmicas generalizadas admissíveis.

Tal formalismo gera um problema de programação não-linear que será utilizado para definir se em cada ponto ocorre perda ou formação óssea (ou se não há remodelamento), e de acordo com isso, as propriedades dos materiais serão atualizadas, caracterizando um aumento ou diminuição da rigidez óssea (ou da densidade óssea).

Com a definição da teoria de remodelamento proposta foram implementados dois programas, o REMOLD 1D e o REMOLD 2D, também descritos no trabalho de Mercuri (2009), que permitem que seja determinada numericamente a solução de problemas de remodelamento ósseo para casos unidimensionais e bidimensionais, respectivamente.

## 1.1 OBJETIVOS

O presente trabalho tem como objetivo propor uma nova abordagem para a teoria do remodelamento ósseo, baseada na idéia de que um dos estímulos para o remodelamento ósseo é a ocorrência de microdano (PRENDERGAST e TAYLOR, 1994; RAMTANI e ZIDI, 1999; RAMTANI e ZIDI, 2001; DOBLARÉ e GARCÍA, 2002; RAMTANI e GARCÍA, 2004; BARBERO, GRECO e LONETTI, 2005). Essa abordagem utiliza os conceitos da Termodinâmica, através da adoção de Variáveis de Estado associadas aos fenômenos irreversíveis, e de Potenciais Termodinâmicos Generalizados.

Apresentar um estudo sobre as funções de remodelamento que podem ser utilizadas para o modelo proposto.

Fazer a implementação numérica da teoria proposta, bem como validar os resultados numéricos obtidos para alguns exemplos, com base nos resultados experimentais disponíveis na literatura.

É importante salientar que o modelo de remodelamento proposto trata do remodelamento usual, característico dos ossos em condições normais, não contemplando os casos de fratura, que contém processos inflamatórios.



## 1.2 JUSTIFICATIVA

Pode-se afirmar que os princípios da termodinâmica apresentam-se como ferramentas que garantem uma formulação consistente do remodelamento ósseo, permitindo incorporar reações químicas, transferência de massa e presença de microdano, além de outras características significativas do fenômeno.

A abordagem das equações constitutivas que descrevem o comportamento dos materiais com base em princípios termodinâmicos apresenta uma série de vantagens sobre a abordagem tradicional, entre as quais se destaca a obtenção de resultados que seguramente não violam as Leis da Termodinâmica.

Além disso, a partir dos potenciais termodinâmicos e de técnicas de análise convexa, princípios de mínimo, equivalentes às formulações variacionais do problema, são obtidos, conforme destacado por Houlsby e Puzrin (2000), Hecke (1991) e Han e Reddy (1999). Esses princípios são úteis para a discussão da existência e da unicidade da solução do problema.

## 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Neste primeiro capítulo tem-se a introdução ao tema, com a definição dos objetivos e da justificativa para o desenvolvimento do trabalho. No capítulo 2 é apresentada a revisão da literatura, relacionada principalmente ao comportamento ósseo e aos modelos de remodelamento existentes, que estabelecem a fundamentação teórica para o desenvolvimento do trabalho.

O capítulo 3 traz a proposta do modelo de remodelamento ósseo com base no formalismo da termodinâmica e nas ferramentas da análise convexa.

O capítulo 4 mostra a particularização do modelo de remodelamento para o caso unidimensional. Nesse capítulo são apresentados três exemplos, que têm como objetivo ilustrar o fenômeno do remodelamento.

O capítulo 5 traz a particularização do modelo de remodelamento para os caso bidimensional. Nesse capítulo é apresentado um exemplo de uma trabécula óssea, com o intuito de mostrar como o fenômeno do remodelamento é tratado pela formulação.

No capítulo 6 são apresentados, de maneira sucinta, os dois programas produzidos (REMOLD 1D e REMOLD 2D) com a implementação da teoria proposta.

O capítulo 7 finaliza o trabalho, com considerações a respeito da formulação e dos exemplos mostrados. Nesse capítulo ainda são apresentadas sugestões para a continuidade do trabalho.

No Apêndice A tem-se uma breve revisão do formalismo da termodinâmica, com algumas definições e considerações gerais sobre as grandezas utilizadas na termodinâmica. Também são apresentadas as leis da termodinâmica que são satisfeitas pelo modelo de remodelamento ósseo proposto.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Na revisão da literatura são abordados conceitos que dizem respeito ao tecido ósseo, bem como a composição e a adaptação óssea, além de uma apresentação do que os pesquisadores têm determinado sobre as propriedades mecânicas dos ossos, principalmente por meio de ensaios de laboratório.

Além disso, são apresentados alguns dos modelos de remodelamento ósseo mais difundidos na literatura, que servem de referência para o desenvolvimento da nova abordagem que está sendo proposta para o fenômeno do remodelamento ósseo.

### 2.1 TECIDO ÓSSEO

O sistema músculo-esquelético tem como principais objetivos a transmissão de forças e a proteção de órgãos vitais e os tecidos que fazem parte deste sistema são os ossos, as cartilagens, os tendões, os ligamentos e os músculos.

Os ossos determinam a rigidez e a resistência estrutural global, enquanto que os outros tecidos transmitem as cargas para os ossos. De forma geral, os ossos podem ser curtos, longos ou achatados, dependendo da função que exercem na estrutura óssea (RÜBERG, 2003).

Do ponto de vista macroscópico o tecido ósseo é não homogêneo, poroso e anisotrópico. A porosidade pode variar continuamente, e devido a ela podem-se distinguir dois tipos de tecido ósseo, o trabecular (porosidade entre 50 e 95%) e o cortical (porosidade entre 5 e 10%) .

A porosidade vascular é maior (diâmetro de 50  $\mu\text{m}$ ) no tecido ósseo compacto ou cortical. Essa porosidade é formada por canais de Havers e de Volkmann com capilaridades e nervos. Outras porosidades são associadas com as lacunas e com o espaço entre o colágeno e a hidroxiapatita (aproximadamente 10 nm).

O osso cortical é constituído de estruturas cilíndricas conhecidas como osteons ou sistemas Haversianos. É encontrado usualmente na diáfise de ossos longos e circundando o osso trabecular, formando uma casca externa de ossos

planos (DOBLARÉ, GARCÍA e GÓMEZ, 2004).

O tecido ósseo trabecular ou esponjoso é menos denso que o cortical e é normalmente encontrado em ossos com forma de cubo e nas extremidades de ossos longos. Os poros são interligados e preenchidos com medula, cuja função principal é produzir células básicas de sangue (DOBLARÉ, GARCÍA e GÓMEZ, 2004).

Na Figura 2.1 é apresentada a estrutura microscópica do osso cortical.

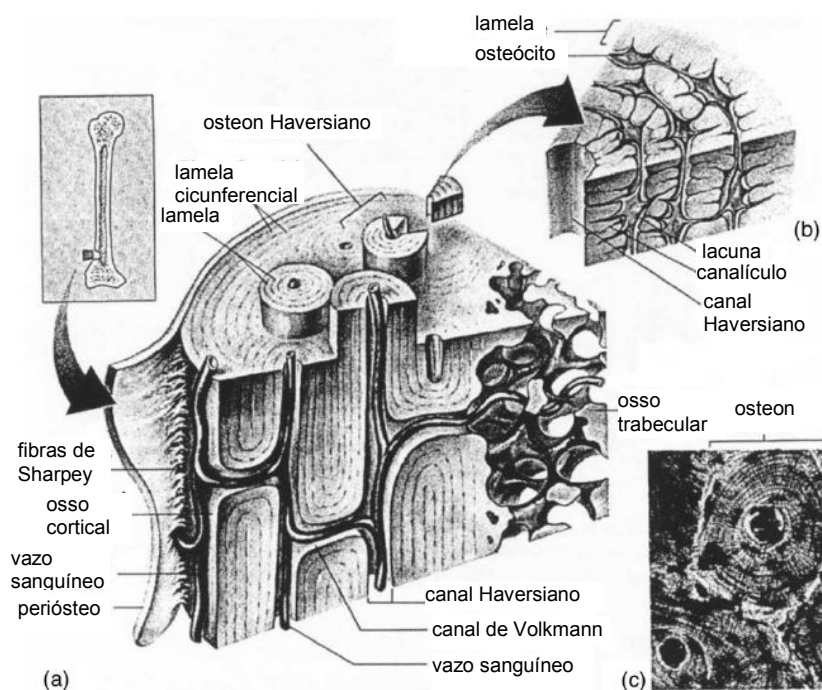


Figura 2.1 – Estrutura microscópica do osso cortical. (a) Esboço 3D do osso cortical; (b) corte do sistema Haversiano; (c) fotomicrografia do sistema Haversiano.

Fonte: DOBLARÉ, GARCÍA e GOMEZ, 2004

Na Figura 2.2 tem-se a representação do osso cortical (mais externo) e do osso trabecular (no interior) e é possível observar a diferença de porosidade entre eles. Para deixar mais nítida a diferença entre o osso cortical e o trabecular é apresentada a Figura 2.3 , com imagens de microscopia dos dois tipos de ossos.

Muitos dos exemplos considerados nos trabalhos encontrados na literatura tratam do comportamento do osso cortical (JACOBS et al., 1997; DOBLARÉ e GARCIA, 2002; GARCIA, DOBLARÉ e CEGOÑINO, 2002; REINA et al., 2007) e os trabalhos de Ramtani et al. (2004), McNamara e Predergast (2007) e Souza et al.

(2008) entre outros, analisam o comportamento de ossos trabeculares.

Analisando a composição celular dos ossos, identifica-se que há quatro tipos de células ósseas com funções distintas: os osteoblastos, os osteoclastos, as células de revestimento (ou célula osteogênica) e os osteócitos (DOBLARÉ, GARCÍA e GÓMEZ, 2004).

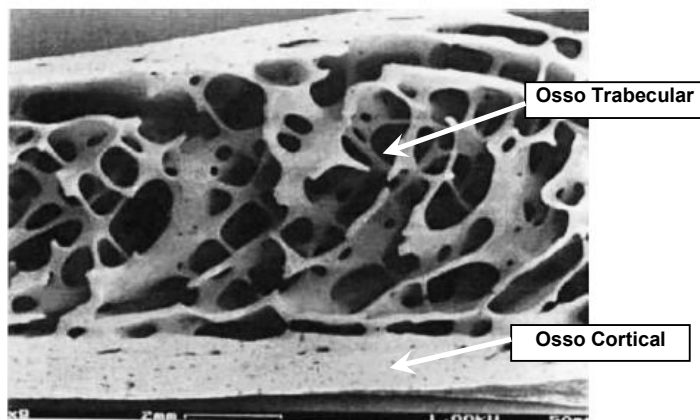


Figura 2.2 – Seção do osso mostrando osso trabecular e cortical.

Fonte: DOBLARÉ, GARCÍA e GOMEZ, 2004

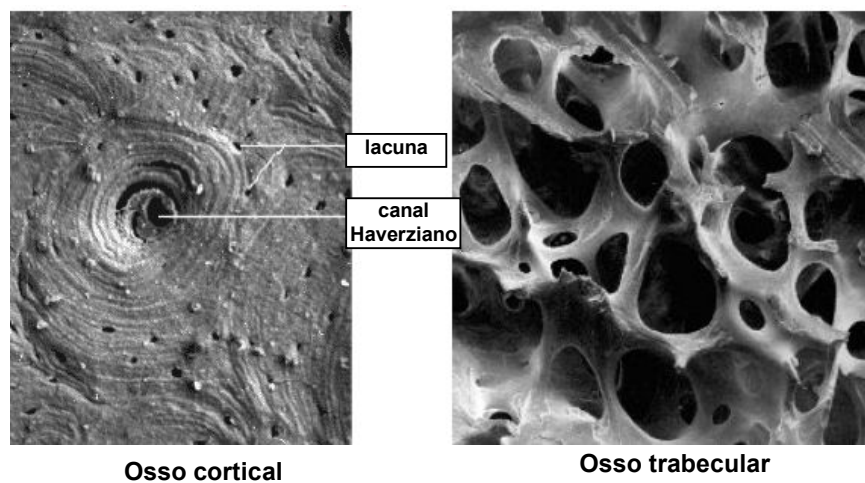


Figura 2.3 – Diferenças entre osso trabecular e cortical.

Fonte: SIMÕES, 2007

Na Figura 2.4 tem-se a representação simplificada das células ósseas com uma breve descrição de suas funções principais.

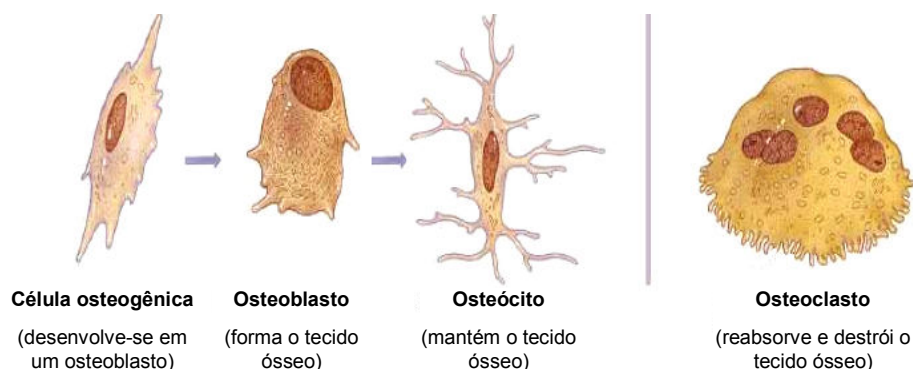


Figura 2.4 – Tipos de células ósseas.

Fonte: SIMÕES, 2007

Os osteoblastos são células mesenquimais diferenciadas que produzem osso. São fabricadas na camada do perióstio ou no tecido estroma da medula óssea.

Os osteoclastos removem o osso, desmineralizando-o com ácido e dissolvendo colágeno com enzimas. Estas células originam-se da medula óssea.

As células de revestimento são os osteoblastos inativos, que não estão alojados em ossos novos. Estas células permanecem sobre a superfície quando a formação óssea cessa e podem ser reativadas em resposta aos estímulos químicos e mecânicos.

Os osteócitos são osteoblastos antigos que estão na matriz óssea.

## 2.2 REMODELAÇÃO ÓSSEA

O comportamento ósseo tem como uma das características mais importantes a capacidade auto-adaptativa, que consiste em modificar sua microestrutura e suas propriedades de acordo com o ambiente mecânico. O osso pode crescer, modificar sua forma, auto-reparar-se quando fraturado e renovar-se continuamente por um processo permanente chamado de remodelação interna. A remodelação interna ocorre ao longo de toda a vida, tendo um papel fundamental na evolução da microestrutura óssea e, conseqüentemente, na adaptação de propriedades estruturais e na reparação de microdano (DOBLARÉ, GARCÍA e GÓMEZ, 2004).

Prendergast (2002) assume que existem dois processos de adaptação que fazem parte da construção da forma do esqueleto: o processo filogênico (que diz respeito a otimalidade da forma pela evolução) e o processo ontogênico (que é dependente da vida do indivíduo). O enfoque deste trabalho está na ontogenia, ou seja, na busca de regras de mecano-regulação para determinar o processo de adaptação do osso quando o mesmo está sujeito a carregamentos e a outros fatores.

O processo de remodelação está baseado nas ações separadas das células de reabsorção óssea (osteoclastos) e das células de formação óssea (osteoblastos).

Este processo inicia-se na superfície óssea com os osteoclastos, que se ligam à matriz óssea e formam uma borda desordenada na interface osso/osteoclasto, isolando a região. Na sequência, os osteoclastos acidificam o micro-ambiente e dissolvem as matrizes orgânicas e inorgânicas do osso (RUIMERMAN, 2005).

Assim que o processo de reabsorção cessa, os osteoblastos aparecem na mesma região na superfície para depositar os osteócitos e mineralizá-los, e só então formar o novo osso. Quando os osteoblastos param de sintetizar osso, transformam-se em células que revestem a nova superfície óssea. Essas células de revestimento ficam altamente aderidas na matriz óssea através da rede de canálculos (RUIMERMAN, 2005).

A Figura 2.5 e a Figura 2.6 ilustram as atividades celulares do processo de reabsorção e de formação óssea, de forma detalhada e de forma simplificada, respectivamente.

As atividades celulares que ocorrem durante o processo de adaptação óssea são consenso, mas, segundo McNamara e Prendergast (2007), os mecanismos regulatórios, que governam o efeito da tensão mecânica na ação de remodelação óssea, ainda não estão completamente compreendidos. Muitas tentativas têm sido realizadas com o intuito de determinar o exato estímulo mecânico (fluxo de fluido, matriz de deformação, matriz de dano) que causa resposta nas células mecano-sensitivas.

Diversas são as teorias que tentam explicar os processos de adaptação óssea e muitas delas são conflitantes. No entanto, nos trabalhos mais recentes, existe um consenso em torno da idéia de que a remodelação óssea não é apenas um processo de adaptação ao carregamento externo atuante, mas que a mesma é

também a consequência de um processo de remoção do microdano (microfissuração e microfratura do osso) (MARTIN e BURR, 1982; PRENDERGAST e TAYLOR, 1994; BURR, 2000; LEE, STAINES e TAYLOR, 2002; MARTIN, 2002 e VERNA et al., 2004).

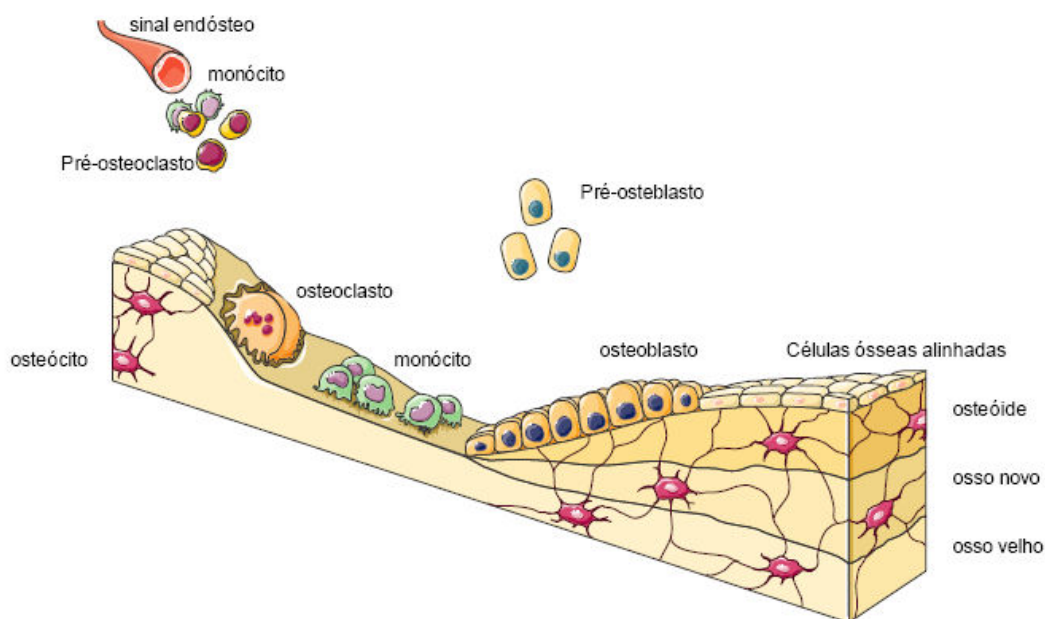


Figura 2.5 – Esquema detalhado do processo de remodelamento ósseo.

Fonte: SIMÕES, 2007

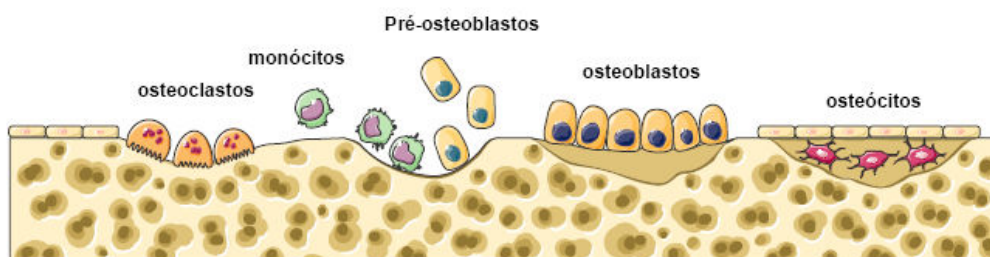


Figura 2.6 – Esquema simplificado do processo de remodelamento ósseo.

Fonte: SIMÕES, 2007

Evidências experimentais têm mostrado que a reabsorção ocorre preferencialmente nas regiões de microdano no osso cortical (BURR et al., 1985; MORI e BURR, 1993), e a uniformidade das dimensões das microfissuras sugere que o processo de reparação mantém o comprimento da fratura abaixo de um certo



nível (O'BRIEN et al., 2000; LEE et al., 2003). Esses dados embasam a hipótese de que o remodelamento ósseo é um processo de reparação para manter a resistência do osso através da reabsorção do osso danificado e substituição do mesmo por um osso novo (MCNAMARA e PRENDERGAST, 2007).

De acordo com Sahar et al. (2005) há uma inter-relação entre carregamento de fadiga, acúmulo de microdano, remodelação, reparação da matriz óssea e fratura, conforme mostrado na Figura 2.7.

No esquema apresentado na Figura 2.7, observa-se que o processo de dano pode exceder a capacidade local de remodelação do tecido, gerando a fratura. Também é definido que o remodelamento é engatilhado pelo acúmulo de microdano, por meio dos mecanismos sensitivos das células, priorizando o reparo da matriz óssea. Entretanto, algumas vezes o remodelamento pode também aumentar o acúmulo de microdano ou priorizar diretamente a fratura, por exceder uma tensão limite.

Como há menos osso para suportar o carregamento, por causa da reabsorção induzida pelo remodelamento, as deformações no osso remanescente podem aumentar, gerando mais microdano, que estimula outra seqüência de remodelamento e assim por diante. Então um remodelamento alto, assim como o acúmulo de microdano, pode priorizar a fratura.

Desta forma, conclui-se que o acúmulo do microdano pode servir como um estímulo para a remodelação óssea intracortical e para a reparação da matriz ou, num certo limite, o dano pode exceder a reparação e provocar a fratura.

Considerando que o microdano atua como um estímulo para o remodelamento, o estudo e a análise experimental das microfissuras têm grande relevância na caracterização do processo de remodelação (O'BRIEN, TAYLOR e LEE, 2007).

Muitos investigadores têm comparado os resultados das várias teorias de diferenciação óssea com resultados de experiências em animais, e ainda está longe de se chegar a uma definição de qual é "a" teoria de mecano-diferenciação e mecano-regulação.

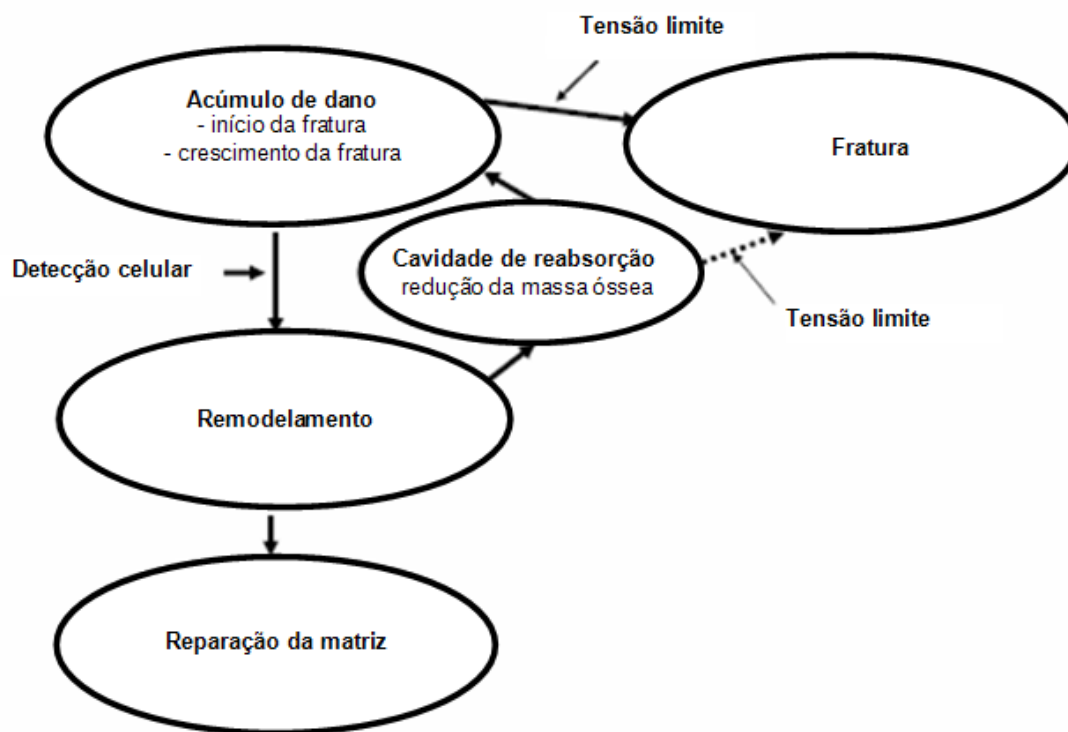


Figura 2.7 – Esquema das relações entre microdano, remodelamento ósseo e fratura.

Fonte: SAHAR et al., 2005

No modelo de remodelamento ósseo apresentado no item 3 são utilizadas variáveis escalares internas para descrever o fenômeno da remodelação óssea.

## 2.3 PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS OSSOS

O tecido ósseo tem propriedades estruturais bastante específicas e é formado por componentes orgânicos e inorgânicos. Os componentes inorgânicos são basicamente responsáveis pela resistência à compressão e rigidez do osso, enquanto que os componentes orgânicos fornecem as propriedades relacionadas à resistência à tração.

O osso é um material poroso, não homogêneo, anisotrópico e não-linear. Além disso, como suas características mecânicas são influenciadas continuamente de acordo com o sexo, a idade, a espécie, com cada osso específico do corpo (sadio ou doente) e com fatores fisiológicos e hormonais, a caracterização do

comportamento dos ossos não é tarefa fácil de se desenvolver (DOBLARÉ, GARCÍA e GÓMEZ, 2004).

Para ilustrar a influência dos fatores citados, na

Figura 2.8 são apresentadas as diferenças de densidade e anatomia, de amostras de ossos trabeculares humanos, extraídos de diversas partes de um mesmo corpo e na Figura 2.9 é mostrada a diferença das fraturas para ossos jovens (34 anos) e velhos (85 anos), submetidos a condições idênticas.

A diversidade de carregamentos externos aos quais os ossos estão submetidos também é um fator que dificulta o seu estudo. De forma geral esses carregamentos podem ser permanentes e transientes, causados por atividades diárias ou por eventos especiais como acidentes (DOBLARÉ e GARCÍA, 2002; RÜBERG, 2003).

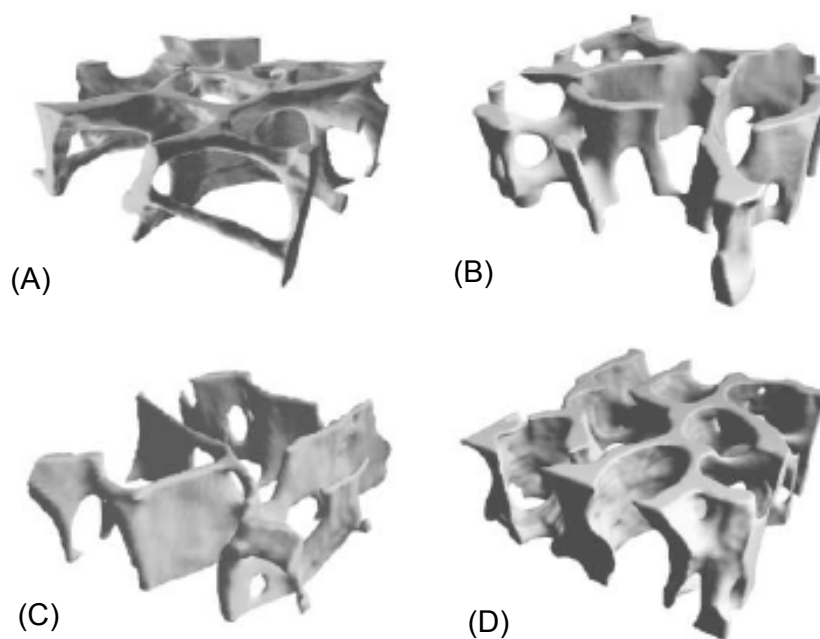


Figura 2.8 – Diferenças de densidade e anatomia em ossos trabeculares humanos  
(A) Vértebra (B) Tíbia proximal (C) Protuberância femoral maior (D) Pescoço femoral.

Fonte: MORGAN e KEAVENY, 2001

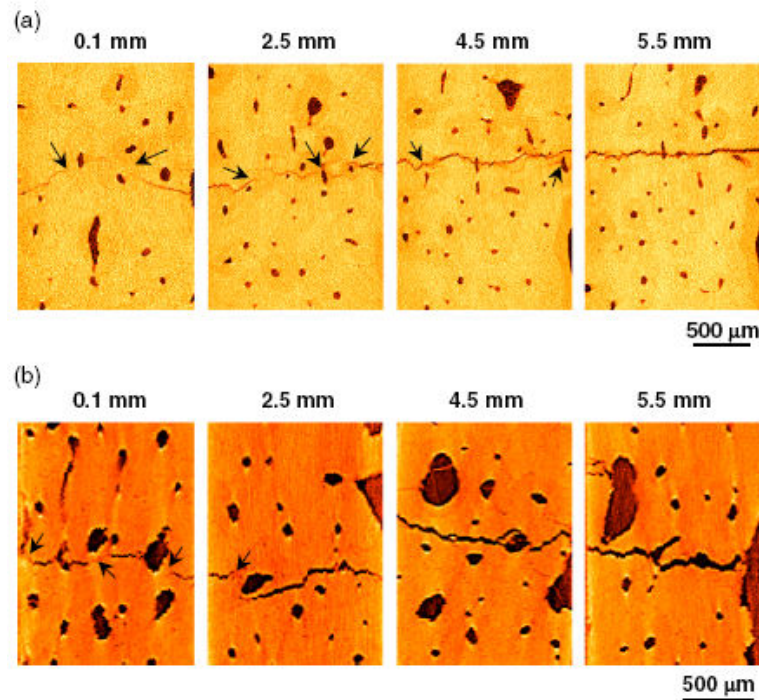


Figura 2.9 – Diferença das fraturas para ossos (a) jovens (34 anos) e (b) velhos (85 anos). Os números acima das imagens representam a distância da imagem a partir da ponta (nominal) da trinca.

Fonte: NALLA et al., 2006

Por causa da complexidade da estrutura óssea, algumas simplificações são necessárias para que seja possível descrever o comportamento mecânico do osso. Uma das simplificações é a consideração da rigidez apenas da matriz óssea, desprezando a contribuição dos nervos e vasos sanguíneos.

A densidade aparente  $\rho$  é definida por:

$$\rho = \frac{m_T}{V_T} \quad (2.1)$$

onde  $m_T$  e  $V_T$  são a massa e o volume do osso, respectivamente. A diferença entre osso (material todo) e tecido ósseo (sem medula ou vazios) deve ser ressaltada para que não haja confusão sobre as propriedades definidas.

Considerando-se uma hipótese de material isotrópico e homogêneo não danificado, o comportamento mecânico pode ser descrito por dois parâmetros materiais: o módulo de Young  $E$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$ .

Na maioria dos trabalhos de caracterização dos ossos são utilizadas leis que

relacionam as propriedades mecânicas dos ossos com a densidade aparente. As leis de aproximação mais comuns têm a seguinte forma:

$$E = B(\rho)\rho^{\beta(\rho)} \quad (2.2)$$

$$\nu = \nu(\rho) \quad (2.3)$$

onde  $B(\rho)$  é dado em MPa,  $\beta(\rho)$  e  $\nu(\rho)$  são coeficientes que dependem da densidade aparente.

Também são muito comumente utilizadas leis com a mesma forma da equação (2.2), para caracterização de tensões de escoamento ou tensões últimas de ossos.

Pesquisadores têm realizado ensaios de laboratório em vários tipos de ossos para diversas espécies, com o intuito de definir de maneira mais precisa o comportamento desse material. De qualquer maneira, a maioria dos modelos de aproximação das propriedades mecânicas considera o comportamento isotrópico do material, por ser difícil quantificar a estrutura anisotrópica do osso como um todo com as técnicas correntes.

A seguir serão apresentados alguns resultados desses trabalhos para que se possa fazer comparações de resultados e escolher os parâmetros que sejam mais representativos para a descrição do remodelamento ósseo.

Muitas das relações apresentadas definem as propriedades mecânicas principais mas não consideram a influência das características estruturais e microestruturais dos ossos (DOBLARÉ, GARCÍA e GÓMEZ, 2004).

### 2.3.1 Caracterização de ossos proposta por Jacobs (1994).

De acordo com Jacobs<sup>2</sup> (1994, citado por Rüberg, 2003), o módulo de Young e o coeficiente de Poisson são definidos como funções da densidade aparente (variável independente).

As relações estabelecidas variam de acordo com dois intervalos de valores que a densidade pode assumir, dessa forma tem-se:

---

<sup>2</sup> JACOBS, C. R. **Numerical simulation of bone adaptation to mechanical loading**. Stanford, 1994. Tese de PhD. Stanford University.

$$E = \begin{cases} 2014\rho^{2,5} & \text{se } \rho \leq 1,2 \text{ g/cm}^3 \\ 1763\rho^{3,2} & \text{se } \rho > 1,2 \text{ g/cm}^3 \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\nu = \begin{cases} 0,2 & \text{se } \rho \leq 1,2 \text{ g/cm}^3 \\ 0,32 & \text{se } \rho > 1,2 \text{ g/cm}^3 \end{cases} \quad (2.5)$$

onde  $E$  é obtido em MPa e  $\rho$  deve ser considerado em  $\text{g/cm}^3$ .

### 2.3.2 Caracterização de ossos proposta por Keaveny et al. (1994) e Keaveny et al. (1999)

No trabalho de Keaveny et al., (1999) foram realizados ensaios de tração uniaxial, compressão uniaxial e torção em 139 corpos de prova de ossos trabeculares tibiais proximais bovinos.

Na Tabela 2.1 são apresentadas as relações empíricas entre a densidade aparente ( $\text{g/cm}^3$ ) e a tensão de escoamento (MPa) dos ossos trabeculares bovinos com relação aos ensaios de tração, compressão e torção. Os ensaios foram realizados para as direções longitudinal (paralela a orientação principal da trabécula) e transversal (perpendicular a orientação principal da trabécula) dos ossos (KEAVENY et al., 1999). O ( $r^2$ ) representa o coeficiente de correlação obtido.

Tabela 2.1 – Relações empíricas entre densidade aparente e tensão de escoamento para ossos trabeculares bovinos.

DIREÇÃO	MODO DE CARREGAMENTO	NÚMERO DE CORPOS DE PROVA	VARIÁVEL	$\sigma_{yi} = a_i \rho^{b_i}$		
				$a_i$	$b_i$	$r^2$
Longitudinal	Compressão	20	$\sigma_{y1}^C$	-86,4	1,99	0,83
	Tração	20	$\sigma_{y1}^T$	46,9	1,68	0,95
	Torção	25	$\sigma_{y4}$	10,1	1,30	0,62
Transversal	Compressão	27	$\sigma_{y2}^C$	-22,4	2,58	0,80
	Tração	24	$\sigma_{y2}^T$	10,8	1,59	0,74
	Torção	23	$\sigma_{y5}$	7,4	1,58	0,68

Fonte: KEAVENY et al., 1999

Na Figura 2.10 apresentam-se as curvas de tensão-deformação para cinco corpos de prova de ossos trabeculares bovinos, que foram ensaiados à tração e à compressão por Keaveny et al. (1994).

O carregamento foi interrompido para deformações de 3% mas as microfraturas ocorreram antes para o carregamento de tração do que para a compressão, mostrando que os ossos bovinos ensaiados são mais resistentes na compressão (KEAVENY et al., 1994). Pode-se observar um comportamento bastante irregular nos ossos ensaiados.

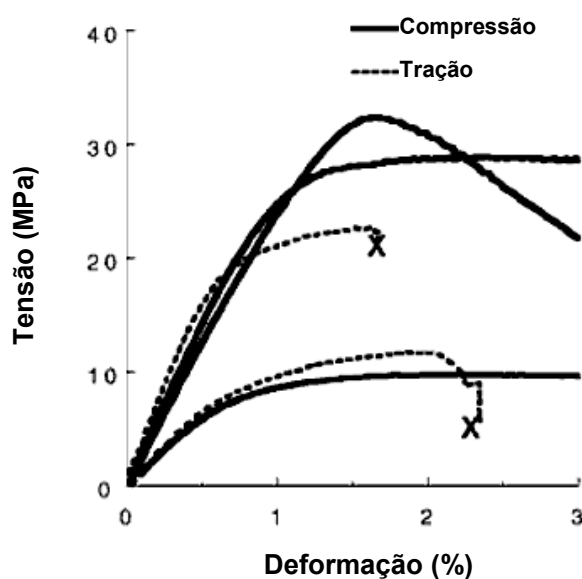


Figura 2.10 – Curvas tensão-deformação para ossos trabeculares tibiais proximais bovinos.

Fonte: KEAVENY et al., 1994

### 2.3.3 Caracterização de ossos proposta por Kopperdahl e Keaveny (1998)

Kopperdahl e Keaveny (1998) realizaram ensaios em ossos trabeculares vertebrais humanos. Foram utilizadas 22 amostras para ensaios à tração e 22 para ensaios à compressão, totalizando 44 amostras bem sucedidas, entre as 48 previstas.

Na Figura 2.11 são mostradas as curvas tensão-deformação para duas amostras de osso trabecular, uma ensaiada à tração e outra à compressão.

A densidade aparente é um dos fatores que influencia diretamente as

propriedades mecânicas dos ossos e algumas dessas propriedades sofrem mais influência da densidade aparente do que outras.

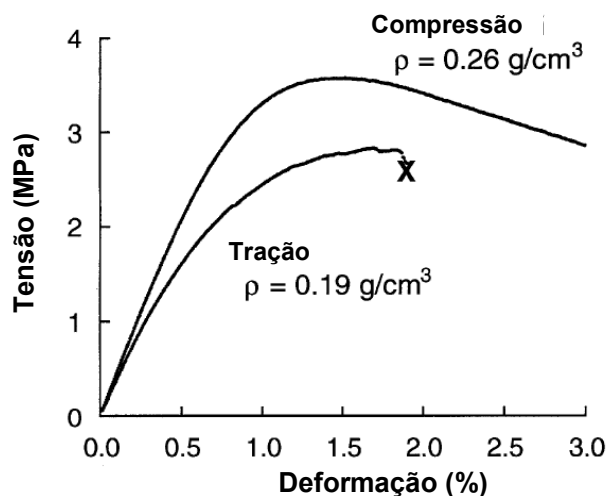


Figura 2.11 – Curvas tensão-deformação para ossos trabeculares vertebrais humanos.

Fonte: KOPPERDAHL e KEAVENY, 1998

Tabela 2.2 – Leis de regressão que relacionam as propriedades mecânicas dos ossos com a densidade aparente ( $\text{g/cm}^3$ ).

	$Y = a + b\rho$						$Y = a\rho^b$					
	Compressão			Tração			Compressão			Tração		
	$a$	$b$	$r^2$	$a$	$b$	$r^2$	$a$	$b$	$r^2$	$a$	$b$	$r^2$
<b>Deformação de escoamento (%)</b>	0,66	1,09	0,49		NS		1,24	0,21	0,48		NS	
<b>Deformação última (%)</b>		NS			NS			NS			NS	
<b>Tensão de escoamento (MPa)</b>	-1,40	19,6	0,73	-	10,1	0,51	32,6	1,60	0,70	10,0	1,04	0,51
<b>Tensão última (MPa)</b>	-1,46	21,9	0,71	-	13,2	0,47	33,2	1,53	0,68	13,3	1,07	0,47
<b>Módulo (MPa)</b>	-	2100	0,61				2350	1,20	0,60			

Fonte: KOPPERDAHL e KEAVENY, 1998

Na Tabela 2.2 são propostas leis de regressão, tanto lineares quanto potenciais, que relacionam as propriedades mecânicas dos ossos com a densidade



aparente. Cada propriedade foi determinada para 22 amostras de ossos trabeculares vertebrais humanos, apenas o módulo de elasticidade foi determinado para os ensaios de tração e compressão associados, com um total de 44 amostras.

A Figura 2.12 mostra a relação linear entre a densidade aparente e o módulo de elasticidade.

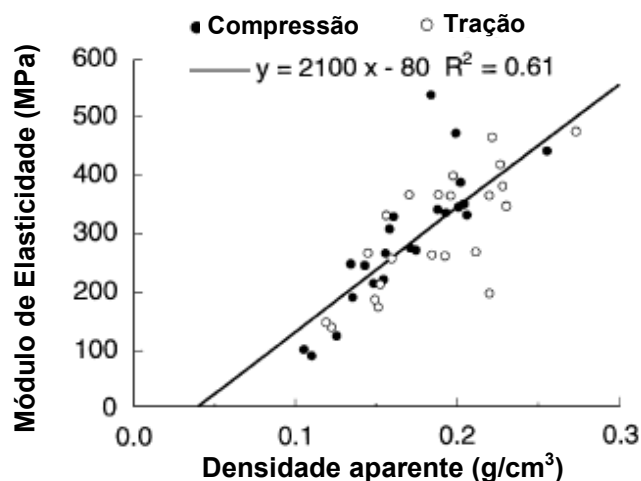


Figura 2.12 – Relação entre densidade aparente e módulo de elasticidade.

Fonte: KOPPERDAHL e KEAVENY, 1998

A relação entre módulo de elasticidade e densidade aparente é de grande interesse para a formulação proposta, uma vez que se adotou para as forças o potencial termodinâmico de densidade de energia livre de Helmholtz.

Segundo Kopperdahl e Keaveny (1998), a equação que relaciona linearmente a densidade aparente (g/cm³) com o módulo de elasticidade (MPa) é definida como:

$$E = 2100\rho \quad (2.6)$$

ou ainda, em termos de potência:

$$E = 2350\rho^{1.2} \quad (2.7)$$

Os valores médios das propriedades obtidas nos ensaios, bem como o desvio padrão dessas propriedades, são mostrados na Tabela 2.3.

Observa-se na Tabela 2.3 que, para valores médios, existe uma diferença das propriedades dos ossos na tração e na compressão, o que determina que os dois casos devem ser tratados de forma distinta nos modelos de remodelamento.

Tabela 2.3 – Médias e desvios-padrão para as propriedades dos ossos.

	COMPRESSÃO (n=22)	TRAÇÃO (n=22)	p*
<b>Densidade aparente úmida (g/cm<sup>3</sup>)</b>	0,17±0,04 0,11-0,26	0,19±0,04 0,12-0,27	0,12
<b>Módulo (MPa)</b>	291±113 90-536	301±100 139-472	0,76
<b>Deformação de escoamento (%)</b>	0,84±0,06 0,75-0,95	0,78±0,04 0,71-0,88	0,0003
<b>Deformação última (%)</b>	1,45±0,33 0,96-2,30	1,59±0,33 1,09-2,51	0,18
<b>Tensão de escoamento (MPa)</b>	1,92±0,84 0,56-3,71	1,75±0,65 0,77-2,75	0,46
<b>Tensão última (MPa)</b>	2,23±0,95 0,70-4,33	2,23±0,76 1,33-3,53	0,99

\* p-valores para comparação de grupos de tração versus compressão usando testes t-student

Fonte: KOPPERDAHL e KEAVENY, 1998

#### 2.3.4 Caracterização de ossos proposta por Hazelwood et al. (2001) e por Hernandez et al. (2001)

O modelo de Hazelwood (HAZELWOOD et al., 2001), utiliza a porosidade  $p$  como a variável independente e o módulo de Young, definido por um polinômio de sexto grau, em função de  $p$ :

$$E(p) = (8,83 \times 10^5)p^6 - (2,99 \times 10^6)p^5 + (3,99 \times 10^6)p^4 - (2,64 \times 10^6)p^3 + (9,08 \times 10^5)p^2 - (1,68 \times 10^5)p + (2,37 \times 10^4) \quad (2.8)$$

onde  $E(p)$  é calculado em MPa.

A porosidade  $p$  é definida por:

$$p = \frac{V_V}{V_T} \quad (2.9)$$

onde  $V_V$  é o volume de vazios, que somado ao volume do tecido ósseo  $V_B$  forma o volume total do osso  $V_T$  ( $V_T = V_B + V_V$ ).

Desprezando-se a mineralização (também conhecida como calcificação), a densidade e a porosidade podem ser relacionadas por:

$$p = 1 - \frac{\rho}{\rho_t} \quad (2.10)$$

com  $\rho_t$  referindo-se a densidade do tecido ósseo sem porosidade. Assume-se para  $\rho_t$  um valor constante aproximado de  $2,0 \text{ g/cm}^3$ , desde que a mineralização não seja considerada.

Hernandez et al. (2001) apresentam uma aproximação dos parâmetros que considera o grau de mineralização, medido por meio de um coeficiente denominado fração de cinza ( $\alpha$ ). O módulo de Young e a resistência última à compressão (em MPa) variam com a fração de volume ósseo  $V_B/V_T$  e a fração de cinza  $\alpha$ , respectivamente, como:

$$\begin{aligned} E &= 84,37 \left( \frac{V_B}{V_T} \right)^{2,58} \alpha^{2,74} \\ \sigma_{ult} &= 0,79433 \left( \frac{V_B}{V_T} \right)^{1,92} \alpha^{2,58} \end{aligned} \quad (2.11)$$

com  $E$  em GPa e  $\sigma_{ult}$  em MPa.

### 2.3.5 Caracterização de ossos proposta por Doblaré, García e Gómez (2004)

Distinguindo as direções axial e transversal, Doblaré, García e Gómez (2004) propõem as seguintes leis para o módulo de Young e para a resistência à compressão:

Para o osso femoral cortical:

$$E = \begin{cases} 2065 \rho^{3,09} & (\text{direção axial}) \\ 2314 \rho^{1,57} & (\text{direção transversal}) \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\sigma_c = \begin{cases} 72,4 \rho^{1,88} & (\text{direção axial}) \\ 37 \rho^{1,51} & (\text{direção transversal}) \end{cases} \quad (2.13)$$

com valores em MPa.

Para o osso femoral trabecular:

$$E = \begin{cases} 1904 \rho^{1,64} & (\text{direção axial}) \\ 1157 \rho^{1,78} & (\text{direção transversal}) \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\sigma_c = \begin{cases} 40,8 \rho^{1,89} & (\text{direção axial}) \\ 21,4 \rho^{1,37} & (\text{direção transversal}) \end{cases} \quad (2.15)$$

com valores em MPa.

A resistência à tração é definida como uma porcentagem da resistência à compressão, que pode variar de 33 a 70% para ossos trabeculares bovinos e de 50 a 70% para ossos corticais humanos (DOBLARÉ, GARCÍA e GÓMEZ, 2004).

### 2.3.6 Caracterização de ossos proposta por Rincón-Kohli e Zysset (2008)

No trabalho de Rincón-Kohli e Zysset (2008) foram realizados ensaios em ossos trabeculares humanos de 12 cadáveres (7 femininos e 5 masculinos), com idades entre 30 e 89 anos (média 73,5 e desvio padrão 16,8).

Ao todo foram preparadas 139 amostras retiradas de diversas partes do corpo humano (fêmurs proximais, tíbias proximais, radio distal e coluna lombar) sempre observando que os ossos estivessem livres de má formação. Desse total de amostras, 128 foram ensaiadas porque 11 amostras estavam desalinhadas com relação ao eixo longitudinal.

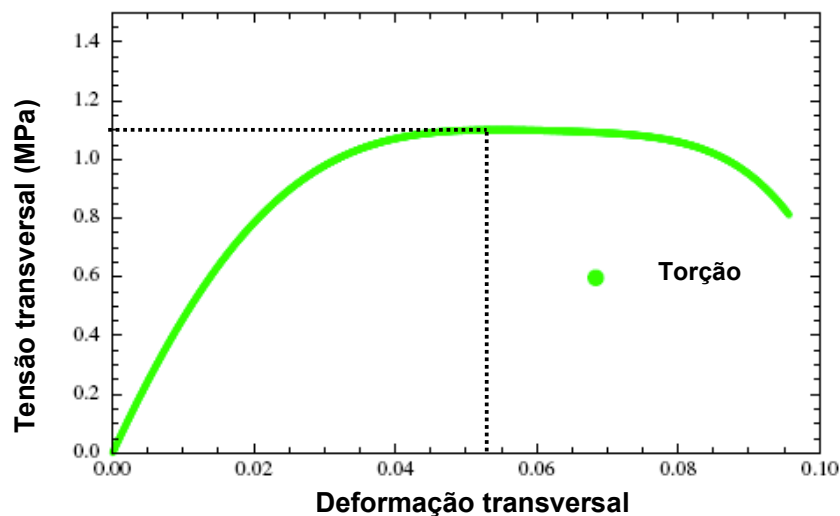


Figura 2.13 – Diagrama tensão-deformação para o ensaio de torção (T).

Fonte: RINCÓN-KOHLI e ZYSSET (2008)

Os pesquisadores realizaram ensaios de torção (T), tração uniaxial (UT), compressão uniaxial (UC) e compressão multiaxial (MC) e os resultados dos diagramas tensão-deformação para estes ensaios são mostrados na Figura 2.13 , na Figura 2.14 e na Figura 2.15, respectivamente.

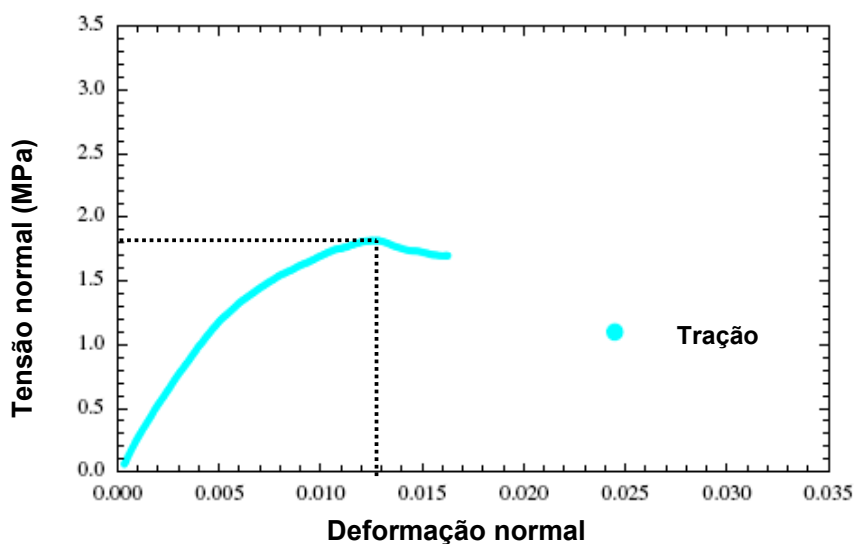


Figura 2.14 – Diagrama tensão-deformação para o ensaio de tração (UT).

Fonte: RINCÓN-KOHLI e ZYSSET (2008)

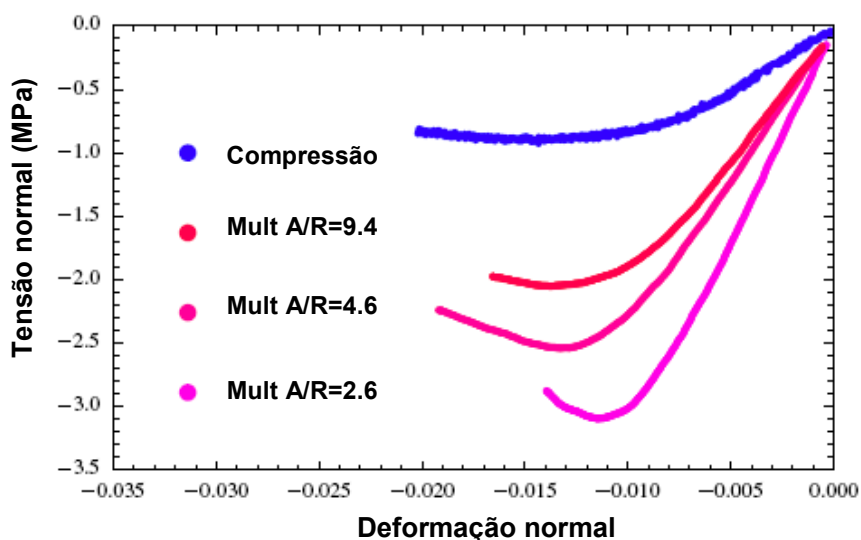


Figura 2.15 – Diagramas tensão-deformação para os ensaios de compressão uniaxial (UC) e multiaxial (MC).

Fonte: RINCÓN-KOHLI e ZYSSET (2008)

Zysset (2003) fez um trabalho onde são apresentadas as várias relações teóricas entre as propriedades mecânicas dos ossos, tensor “fabric” e a fração de volume ósseo, para a consideração de isotropia, ortotropia e anisotropia.

Os ensaios apresentados (RINCÓN-KOHLI e ZYSSET, 2008) foram realizados com o objetivo de definir uma relação entre as propriedades mecânicas dos ossos, o tensor “fabric” (que trata da anisotropia do osso) e a fração de volume ósseo, complementando a teoria proposta em Zysset (2003).

É importante salientar que os ensaios não são capazes de reproduzir o fenômeno da formação óssea, devido ao fato de terem sido realizados em amostras extraídas de cadáveres, que não formam osso. Dessa maneira, os parâmetros obtidos nos ensaios de laboratório estão relacionados somente com a perda de rigidez do osso.

Frost (1960) foi quem iniciou os estudos para descrever o microdano. Depois disso, diversos pesquisadores (BURR et al.(1985), ZIOUPOS E CASINOS (1998), BURR (2000), VERNA et al. (2004), NALLA et al. (2005), SAHAR et al.(2005), NALLA et al. (2006), YANG et al. (2006), RITCHIE et al. (2008) entre outros) passaram a dedicar-se ao estudo do microdano (dano difuso, microfissuração e microfratura) que ocorrem nos ossos. Esses estudos têm particular importância para o trabalho em questão porque definem características do comportamento das variáveis internas de perda de rigidez que serão introduzidas no modelo de remodelamento ósseo, proposto no item 3.

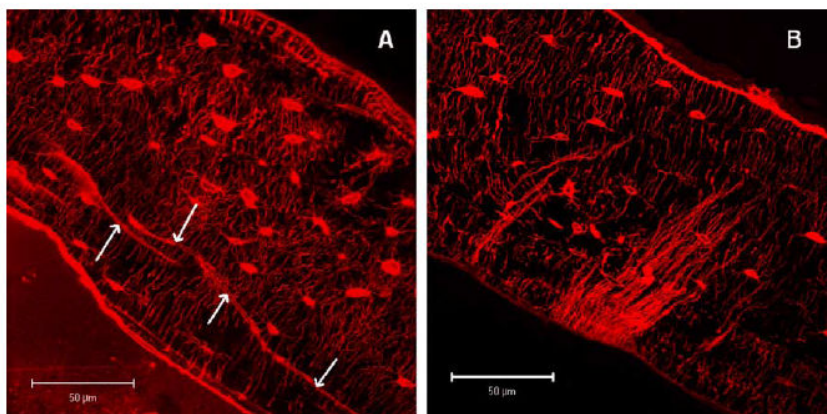


Figura 2.16 – Imagens de fissuração provocada em ensaio de flexão para (A) região comprimida e (B) região tracionada.

Fonte: SAHAR et al., 2005

No que diz respeito ao estudo do comportamento do microdano que ocorre nos ossos e que estimula o processo de remodelamento ósseo, Sahar et al. (2005) afirmam que existe uma associação entre o acúmulo de microdano e a degradação das propriedades mecânicas, em particular do módulo de elasticidade. Entretanto, a relação específica entre esses dois indicadores de dano não está clara.

A Figura 2.16 mostra uma diferença bastante evidente do dano nas regiões tracionada e comprimida. Na região comprimida (A) aparecem, indicadas pelas setas, microfissuras lineares longas e na região tracionada (B) há uma malha turva de fissuras muito finas, denominada de dano difuso.

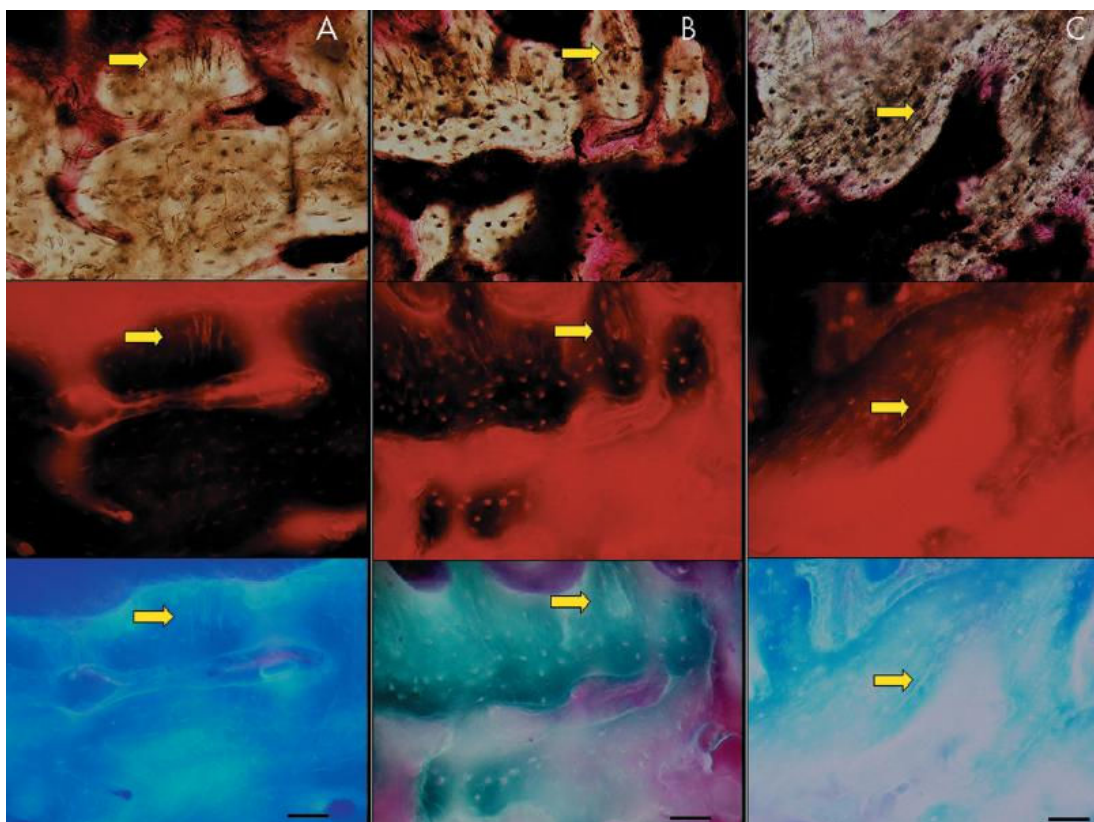


Figura 2.17 – Microdano difuso que aparece no osso alveolar, sob transmissão de luz: (A) do lado bucal não tratado no 1º dia; (B) do lado lingual não tratado no 2º dia; (C) do lado bucal tratado no 2º dia. A barra indica 50  $\mu\text{m}$ .

Fonte: VERNA et al. (2004)

Segundo Burr et al. (1985) ocorre acúmulo de dano mais rapidamente na tração do que na compressão, mas é limitado por um crescimento lento na tração. Padrões de dano difuso podem também ser explicados por essa observação e como

as microfissuras são formadas facilmente na tração, mas são pequenas, aparece a malha de fissuras. No limite, essa malha se torna tão fina que uma fissura não pode ser distinguida da outra.

A Figura 2.17 mostra a evolução do microdano difuso em ossos alveolares ortodônticos de porcos, que sofreram o movimento do primeiro molar inferior direito. No estudo em questão, foram analisados 25 animais (VERNA et al., 2004).

Yang et al. (2006) apresentam ensaios de laboratório em ossos corticais umerais de cadáveres recém congelados, para três doadores entre 34 e 41 anos. As curvas de carga-deslocamento obtidas para o ensaio de tração são mostradas na Figura 2.18.

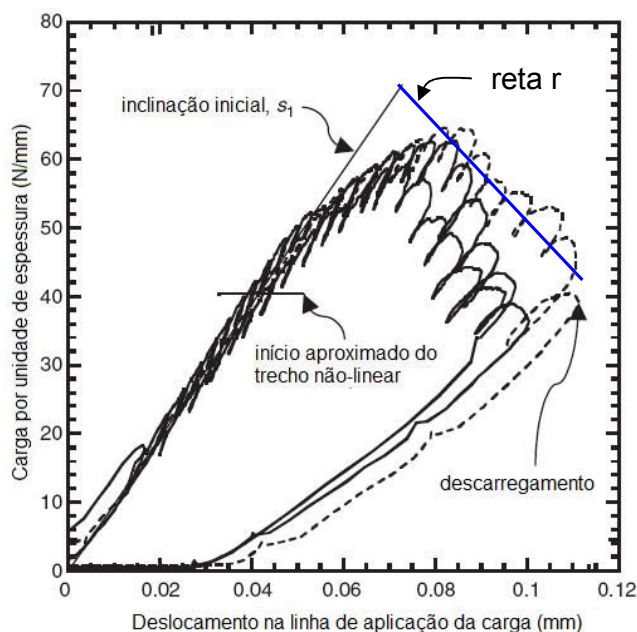


Figura 2.18 – Curvas carga-deslocamento para ossos corticais umerais humanos de três doadores.

Fonte: YANG et al., 2006

Analizando os resultados obtidos na Figura 2.18, observa-se uma perda de resistência com variação aproximadamente linear (conforme indica a reta  $r$ ) e também uma perda de rigidez considerada linear, caracterizada pela variação do módulo de Young. Esse resultado define uma influência linear da variável de dano, já para o osso cadavérico não se considera a influência da reparação óssea.

Pode-se observar também que aparece um deslocamento residual no diagrama do ensaio quando ocorre o descarregamento, este deslocamento será



desprezado no modelo proposto neste trabalho.

Observa-se que se tem mais informações sobre a influência dos fatores mecânicos na perda de rigidez. A formação óssea é mais comumente estudada quando está associada a uma indução de formação de tecido ósseo por meio de fatores externos como colocação de extensores ou aplicação de materiais biológicos ou químicos que estimulam a formação.

Para exemplificar uma análise da formação óssea, tem-se o trabalho de Hsieh e Turner (2001). Esses pesquisadores estudaram o comportamento da ulna de 60 fêmeas de ratos, sujeitas a cargas dinâmicas cíclicas de compressão. Durante duas semanas, foram aplicados 360 ciclos de carga por dia e no final deste período foi quantificada a formação óssea nas superfícies periosteal e endocondral da ulna, em relação a uma referência.

Na Figura 2.19 é apresentado o resultado da análise do experimento para uma célula, mostrando qualitativamente a formação óssea. Observa-se que na seção A aparece apenas um nível de fluorocromo (substância fluorescente utilizada na microscopia) enquanto que na Seção B aparecem dois níveis, o que indica a formação óssea. Uma visualização em escala maior mostra que os ossos novos formados são bem organizados.

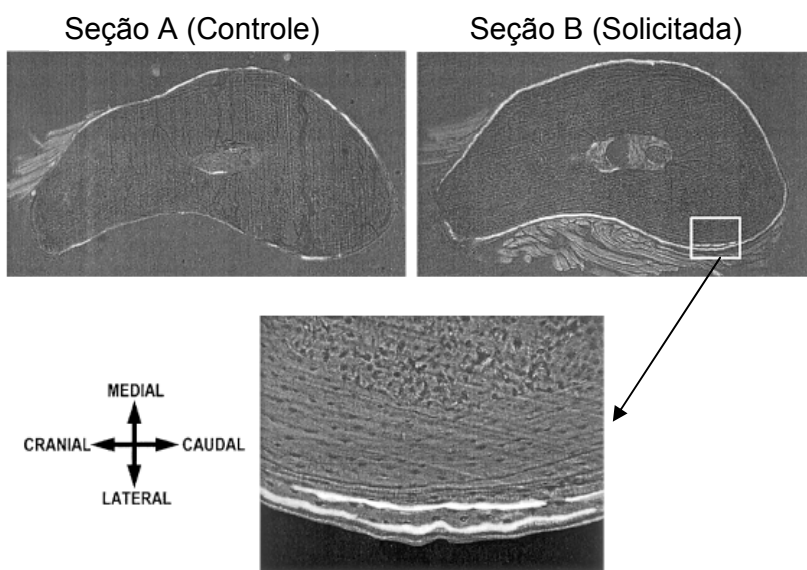


Figura 2.19 – Foto-micrografia de seções da ulna de fêmeas de ratos.

Fonte: HSIEH e TURNER, 2001

Nos trabalhos de Busa et al. (2005) e de Gross et al. (1997) também são apresentados estudos sobre a formação óssea.

O modelo proposto neste trabalho é formulado para que seja possível considerar, por meio das variáveis que regulam o mecanismo de remodelação óssea, as influências mecânicas e biológicas na formação e perda do tecido ósseo.

Por uma questão de simplificação, somente a influência mecânica será considerada, embora não se possa ignorar a importância de incorporar os efeitos dos fatores biológicos na remodelação óssea.

Alguns pesquisadores dedicam-se à relacionar os efeitos biológicos com a remodelação, como Kroll (2000), que apresenta a influência do hormônio da paratireóide (PTH) nos fenômenos de perda e reparação óssea. A dificuldade está em associar os resultados desses estudos aos parâmetros do modelo de remodelamento ósseo.

## 2.4 MODELOS DE REMODELAÇÃO ÓSSEA

Sabe-se que muitos são os fatores que influenciam a remodelação óssea, entre eles pode-se destacar fatores mecânicos, fisiológicos e hormonais, relacionados com sexo, idade e outras características dos seres vivos.

Diferente da resposta básica do osso às cargas mecânicas, definida pela Lei de Wolff<sup>3</sup>, a relação mecanobiológica entre o ambiente mecânico local e a diferenciação dos tecidos, influencia fortemente no tipo de tecido e na arquitetura molecular do esqueleto (CULLINANE et al., 2003).

Na seqüência serão descritos alguns dos principais modelos que simulam a remodelação óssea, com os estímulos e as variáveis consideradas. O maior interesse deste trabalho está nos modelos baseados na Termodinâmica e também na Mecânica do Dano Contínuo.

Esses modelos, disponíveis na literatura, servem de referência para a teoria de remodelamento ósseo que está sendo proposta neste trabalho, embora não seja utilizado o mesmo formalismo em nenhum deles.

Uma observação importante é que o modelo apresentado por Barbero, Greco e Lonetti (item 2.4.7) não é específico para ossos.

---

<sup>3</sup> WOLFF, J. **Das gesetz der transformation der knochen**. Hisschwald, Berlin, 1892.

### 2.4.1 Modelo Isotrópico de Stanford

Segundo Rüberg (2003) o modelo Isotrópico de Stanford foi desenvolvido principalmente por Jacobs<sup>4</sup> em 1994.

É muito importante para a compreensão desse modelo que seja feita uma diferenciação entre o contínuo e o tecido, pois a tensão no tecido ósseo é maior do que a tensão no contínuo, que engloba os vasos sanguíneos a medula e os nervos (RÜBERG, 2003).

Na equação (2.16) é apresentada a relação entre a tensão no contínuo ( $\bar{\sigma}$ ) e a tensão no tecido ( $\bar{\sigma}_t$ ). O índice  $t$  identifica que trata-se do tecido.

$$\bar{\sigma} = \left( \frac{\rho}{\rho_t} \right)^2 \bar{\sigma}_t = \left( \frac{V_B}{V_T} \right)^2 \bar{\sigma}_t \quad (2.16)$$

onde  $V_T = V_B + V_V$  é o volume total do osso,  $V_B$  o volume do tecido ósseo,  $V_V$  o volume de vazios,  $\rho$  a densidade aparente, e  $\rho_t$  a densidade do tecido ósseo.

Uma tensão de referência é definida em termos da energia de deformação ( $U$ ), por :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{2EU} = \sqrt{E\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.17)$$

onde  $E$  é o módulo de Young e  $\mathbf{C}$  é o tensor constitutivo, tal que  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$ , com  $\boldsymbol{\sigma}$  sendo o tensor de tensão e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  o tensor de deformação. O símbolo  $(:)$  representa o produto escalar entre tensores ( $\mathbf{P} : \mathbf{Q} = P_{ij} Q_{ij}$ ).

Carter e Beaupré<sup>5</sup> (2001, citado por Rüberg, 2003) introduziram um estímulo diário de tensão, que é uma quantidade escalar que considera o impacto da tensão e os ciclos de carregamento devido a diferentes casos de carga aplicados durante o dia. O estímulo é estabelecido por :

$$\Psi = \left( \sum_{i=1}^N n_i \bar{\sigma}_i^{m_p} \right)^{1/m_p} \quad (2.18)$$

---

<sup>4</sup> JACOBS, C. R. **Numerical simulation of bone adaptation to mechanical loading**. Stanford, 1994. Tese de PhD. Stanford University.

<sup>5</sup> CARTER, D. R.; BEAUPRÉ, G. S. **Skeletal function and form: Mechanobiology of Skeletal Development, Aging and Regeneration**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

considerando que  $n_i$  é o número de ciclos para o caso de carga  $i$ ,  $N$  é o número dos diferentes casos de carga em um dia,  $\bar{\sigma}_i$  é a medida de tensão, como definido em (2.17) e  $m_p$  é um expoente de ponderação do impacto da tensão relativa para o número de ciclos de carga.

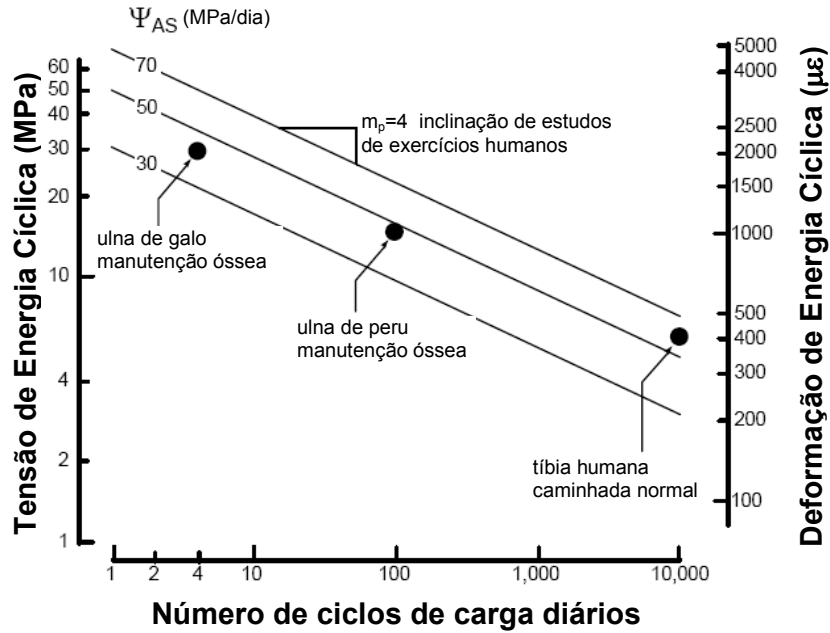


Figura 2.20 – Deformação ou tensão aplicada para o número de ciclos de carga no equilíbrio do remodelamento.

Fonte: RÜBERG, 2003

Rüberg (2003) apresenta um diagrama de tensão aplicada versus o número de ciclos de carga para os casos onde a massa óssea foi mantida, em escala logarítmica, conforme indicado na Figura 2.20. A inclinação da linha obtida no diagrama define o valor de  $m_p$ , que na maioria dos métodos é adotado  $m_p = 4$ .

No modelo Isotrópico de Stanford foi introduzido o estímulo de tensão diário no tecido, definido por:

$$\Psi_t = \left( \sum_{i=1}^N n_i \bar{\sigma}_{t_i}^{m_p} \right)^{1/m_p} \quad (2.19)$$

onde  $\bar{\sigma}_{t_i}$  é a medida de tensão no tecido ósseo.

Existe um estímulo de equilíbrio no tecido, para o qual a massa óssea não se altera, ou seja, o remodelamento está em equilíbrio e a densidade aparente não

varia. A condição para que este equilíbrio ocorra é:

$$\Psi_t = \Psi_t^* \quad (2.20)$$

onde  $\Psi_t^*$  é o estímulo de equilíbrio no tecido.

É definida então, uma expressão para o erro do estímulo, cujo valor causa remodelamento na superfície do tecido ósseo:

$$e_e = \Psi_t - \Psi_t^* \quad (2.21)$$

Segundo Rüberg (2003) a taxa de remodelamento ósseo superficial ( $\dot{r}$ ) e o erro do estímulo ( $e$ ), podem ser relacionados linearmente por:

$$\dot{r} = c(\Psi_t - \Psi_t^*) = c \cdot e_e \quad (2.22)$$

ou ainda, podem ser relacionados pela equação (2.23).

$$\dot{r} = \begin{cases} c(e_e + w), & \text{para } e_e < -w & \text{reabsorção} \\ 0, & \text{para } -w \leq e_e \leq w & \text{equilíbrio} \\ c(e_e - w), & \text{para } e_e > w & \text{formação} \end{cases} \quad (2.23)$$

No modelo Isotrópico de Stanford,  $c$  é uma constante que não tem que ser necessariamente igual para todos os casos de (2.23). Na Figura 2.21 tem-se a representação das duas relações e observa-se os pontos que definem as zonas de formação (aposição), reabsorção ou equilíbrio (zona morta) do tecido em função do estímulo.

A zona morta é um intervalo de valores para os quais não há remodelamento ósseo. O valor de  $w$  representa a metade do intervalo da zona morta.

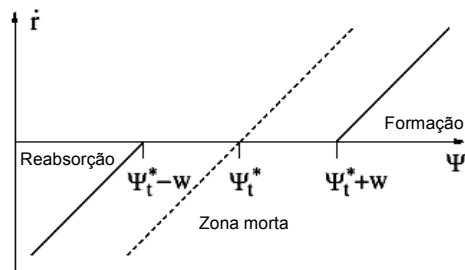


Figura 2.21 – Função taxa linear (pontilhado, para equação (2.22)), e função taxa linear por partes com zona morta (contínuo, para equação (2.23)).

Fonte: RÜBERG, 2003

A área superficial interna por volume de referência (densidade superficial ou área de superfície específica),  $S_v$ , está diretamente relacionada à porosidade pelo seguinte polinômio:

$$S_v = 0,02876p^5 - 0,10104p^4 + 0,13396p^3 - 0,09304p^2 + 0,03226p \quad (2.24)$$

com os coeficientes dados em  $mm^2/mm^3$ . A Figura 2.22 representa a função  $S_v$ , com a porosidade variando de 0 a 1.

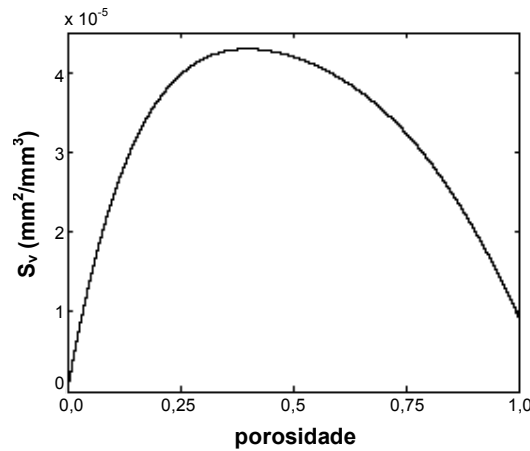


Figura 2.22 – Área de superfície específica ( $S_v$ ).

Fonte: RÜBERG, 2003

Adotando a hipótese de que todo osso formado ou reabsorvido é completamente mineralizado e que toda área superficial é ativa, o que não condiz com a realidade, a lei da taxa de densidade pode ser definida por:

$$\dot{\rho} = r S_v \rho_t \quad (2.25)$$

Fazendo-se a integração da equação (2.25) tem-se o valor da densidade aparente, que determina os parâmetros materiais, por meio de relações como as definidas nas equações (2.2) e (2.3).

Com relação à implementação computacional, no processo iterativo, as propriedades materiais definidas são atualizadas em cada incremento de carga, utilizando o Método de Euler Progressivo Explícito para determinar a nova densidade:

$$\rho_{n+1} = \rho_n + \dot{\rho}_n \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (2.26)$$

onde  $\Delta t$  é o incremento de tempo.

Mesmo sabendo-se que o valor de  $S_v$  tende a zero quando o valor da densidade está muito próximo da densidade do tecido, com um passo de tempo grande não é possível impedir que o valor da densidade se torne negativo, o que é fisicamente impossível.

Para prevenir que a densidade assuma um valor negativo, foi utilizado no algoritmo um limite inferior  $\rho_{\min}$  para compensar esta falha. Da mesma forma adotou-se um limite superior  $\rho_{\max}$  para impedir a porosidade negativa, ou seja, uma densidade maior do que a densidade do tecido sem poros.

Como a ordem de aplicação dos casos de carga não afeta significativamente os resultados computacionais, os casos de carregamento podem ser aplicados seqüencialmente, como na realidade, ou reordenados para que um caso de carregamento seja aplicado em um dia (o incremento de tempo mais usual para a simulação de remodelamento ósseo). Desta forma, a equação (2.19) pode ser simplificada para:

$$\Psi_t = n^{1/m_p} \bar{\sigma}_t \quad (2.27)$$

com  $n$  representando o número de ciclos por dia, desde que exista somente um caso de carga diário.

O método Isotrópico de Stanford apresenta algumas instabilidades, como resultados piores para tempo longo (posterior a 4000 dias), e descontinuidades dependentes da malha. Jacobs<sup>6</sup> (1994, citado por Rüberg, 2003) propôs a utilização de elementos quadráticos ou a apresentação de valores nodais ao invés dos valores nos pontos de integração, para minimizar as instabilidades do método.

#### 2.4.2 Modelo Anisotrópico de Stanford

A abordagem proposta para o modelo Anisotrópico de Stanford, que é uma extensão do modelo Isotrópico de Stanford, considera a densidade e a rigidez independentes, mas acopladas, de tal forma que a densidade exerce influência na taxa de variação da rigidez e a rigidez, na taxa de variação da densidade (JACOBS

---

<sup>6</sup> JACOBS, C. R. **Numerical simulation of bone adaptation to mechanical loading**. Stanford, 1994. Tese de PhD. Stanford University.

et al., 1997).

A mudança da microestrutura do osso, induzida pela tensão, resulta na variação da densidade aparente e leva a uma reorientação trabecular, que resulta macroscopicamente num tensor de rigidez não-isotrópico  $\mathbf{C}$ .

Assim, a reprodução desse efeito, depende da densidade aparente  $\rho$  e do tensor de rigidez  $\mathbf{C}$ , com  $\dot{\rho}$  contribuindo para o desenvolvimento da tensão influenciada pela não homogeneidade da densidade e  $\dot{\mathbf{C}}$  contribuindo para o desenvolvimento da tensão influenciada pela anisotropia.

Considera-se que as deformações são infinitesimais, de tal forma que o tensor de tensões  $\boldsymbol{\sigma}$  e o tensor de deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}$  no tecido ósseo, idealizado como um material contínuo, instantaneamente são relacionados por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.28)$$

onde o símbolo  $(:)$  representa o produto escalar entre tensores ( $\sigma_{ij} = C_{ij} \varepsilon_{ij}$ ).

Segundo Jacobs et al. (1997), o desafio da formulação está em encontrar uma regra adequada para  $\dot{\rho}$  e para  $\dot{\mathbf{C}}$  e a solução para resolver este desafio é a busca pela resposta ótima do remodelamento ósseo.

Define-se um osso inteiro ou uma porção do mesmo, composto por um tecido contínuo, anisotrópico e de densidade variável, que ocupa uma região  $\Omega$ , com a superfície externa  $\Gamma$ .

O osso responde a um carregamento aplicado, adaptando-se. Pode-se definir a taxa com a qual este trabalho é realizado por potência mecânica externa, que é dada por:

$$P_{ext} = \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (2.29)$$

onde  $\mathbf{t}$  é o vetor de tração em um ponto da superfície,  $\mathbf{b}$  é a força de corpo em um ponto no interior do domínio e  $\mathbf{v}$  é a velocidade num ponto, medida em mm/dia.

De acordo com o valor de  $P_{ext}$ , tem-se:

$$P_{ext} > 0 \rightarrow \text{atrofia global (perda de rigidez)} \quad (2.30)$$

$$P_{ext} < 0 \rightarrow \text{hipertrofia global (ganho de rigidez)} \quad (2.31)$$

Na ortopedia, as forças de corpo não são consideradas, uma vez que os



valores dessas forças são desprezíveis com relação às trações aplicadas, logo:

$$\int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = 0 \quad (2.32)$$

Como uma medida da eficiência da resposta adaptativa do osso, define-se na equação (2.33) a taxa de dissipação ou a diferença entre a potência associada ao carregamento externo aplicado e a taxa de variação da energia interna total.

$$\mathcal{G} = P_{ext} - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\zeta + K) \, d\Omega \quad (2.33)$$

sendo  $\zeta$  a densidade de energia interna e  $K$  a densidade de energia cinética.

Nos materiais inertes, uma restrição termodinâmica é que a dissipação da energia deve ser não-negativa. Como a dissipação total é a soma das dissipações mecânica e biológica, verifica-se que a dissipação mecânica pode ser negativa, desde que a dissipação de energia total seja não-negativa, não violando assim, as leis da termodinâmica (RÜBERG, 2003).

A potência  $P_{ext}$  pode ser igualada à potência mecânica gerada pelo campo de tensões mais a taxa de variação da energia cinética mais um termo não-padrão que leva em consideração a massa que entra ou sai do sistema:

$$P_{ext} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \, d\Omega + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \rho \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \dot{\rho} \, d\Omega \quad (2.34)$$

A eficiência do sistema pode ser medida por:

$$\mathcal{G} = \int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\zeta}] \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \dot{\rho} \, d\Omega \quad (2.35)$$

onde o primeiro termo da soma entre colchetes é a potência mecânica do campo de tensão e o segundo termo é a variação instantânea da energia potencial interna.

Para  $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} > 0$  ocorre atrofia (perda da rigidez em todas as direções do ponto) e para  $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} < 0$  ocorre hipertrofia.

Como a escala de tempo é da ordem de dias ou semanas, as derivadas instantâneas não variam com o carregamento cíclico individual, ao invés disso, são aplicadas as quantidades que caracterizam o ciclo de carregamento e a variação gradual de ciclo para ciclo (JACOBS et al., 1997).

Se a resposta for puramente elástica, a energia interna  $\zeta$  poderá depender somente do campo de deformações e o integrando da equação (2.35) poderá ser

sempre nulo. Ao contrário, se houver uma resposta adaptativa, a equação (2.35) não será nula e seu valor vai depender de como se define  $\varsigma$ .

Uma forma consistente para a energia interna é função da deformação ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ), do tensor de rigidez ( $\mathbf{C}$ ) e da densidade aparente ( $\rho$ ), que caracterizam o material:

$$\varsigma(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}, \rho) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \Theta(\rho) \quad (2.36)$$

onde  $\Theta(\rho)$  é a parcela da energia interna associada a variação de  $\rho$ .

Matematicamente, para a otimização da resposta adaptativa do osso assume-se que a taxa de variação do tensor de rigidez  $\dot{\mathbf{C}}$  ocorre de forma que a eficiência  $\mathcal{J}$  passe a ser um valor extremo. Para o tecido ósseo esse valor pode ser máximo ou mínimo, dependendo se a resposta do osso é de formação ou absorção.

Essa condição de otimalidade determina somente o comportamento do tensor  $\mathbf{C}$ . Na seqüência as variáveis  $\mathbf{C}$  e  $\rho$  são acopladas para que suas derivadas possam definir o comportamento anisotrópico (JACOBS et al., 1997).

Diferenciando a equação (2.36) tem-se:

$$\dot{\varsigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}, \rho) = \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{d\Theta(\rho)}{d\rho} \dot{\rho} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\varepsilon} + \Theta' \dot{\rho} \quad (2.37)$$

Fazendo a substituição da equação (2.37) na equação (2.35) tem-se para a eficiência:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_{\Omega} \left( \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left( \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\varepsilon} + \Theta' \dot{\rho} \right) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \dot{\rho} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\varepsilon} + \Theta' \dot{\rho} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \dot{\rho} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (2.38)$$

Dessa forma, pode-se observar que:

$$-\boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\varepsilon} \geq 0 \rightarrow \text{atrofia} \quad (\text{todos os termos em } \dot{\mathbf{C}} \leq 0) \quad (2.39)$$

$$-\boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\varepsilon} < 0 \rightarrow \text{hipertrofia} \quad (\text{todos os termos em } \dot{\mathbf{C}} \geq 0) \quad (2.40)$$

As desigualdades (2.41) e (2.42) definem as condições necessárias para que os mecanismos de remodelação óssea sejam, ou não, ativados.

$$f^j(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}, \rho) \geq 0 \rightarrow \text{ocorre remodelação} \quad (2.41)$$

$$f^j(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}, \rho) < 0 \rightarrow \text{n\~ao ocorre remodela\~ao} \quad (2.42)$$

considerando-se que  $j$  representa o n\~umero de crit\~erios utilizados para a caracteriza\~ao do remodelamento \~osseo.

O problema a ser resolvido \~e encontrar um valor extremo para a equa\~ao (2.38) sujeita \~a restri\~ao  $f^j \leq 0$ .

S\~ao empregadas t\~ecnicas de programa\~ao n\~ao-linear para resolver o problema de otimiza\~ao restrito. O Lagrangeano resultante \~e:

$$\Lambda = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\Theta} : \dot{\boldsymbol{\rho}} - \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \dot{\rho} + \sum_j (\gamma^j f^j(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}, \rho)) \right] d\Omega \quad (2.43)$$

onde  $\gamma^j$  s\~ao os multiplicadores de Lagrange para cada crit\~erio de remodelamento.

Como o remodelamento \~osseo pode resultar em aposi\~ao ou reabsor\~ao, considera-se  $j = a$  (aposi\~ao) e  $j = r$  (reabsor\~ao).

A condi\~ao estacion\~aria na equa\~ao (2.43) imp\~oe que a primeira varia\~ao do Lagrangeano seja nula:

$$\delta\Lambda(\delta\boldsymbol{\varepsilon}, \delta\rho) = 0 \quad (2.44)$$

o que resulta em:

$$\int_{\Omega} \left[ \dot{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\varepsilon} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\Theta} : \dot{\boldsymbol{\rho}} \delta\rho + \sum_j \left( \gamma^j \frac{\partial f^j}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \gamma^j \frac{\partial f^j}{\partial \rho} : \delta\rho \right) \right] d\Omega = 0 \quad (2.45)$$

$$\int_{\Omega} \left[ \left( \sum_j \left( \gamma^j \frac{\partial f^j}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) + \dot{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\varepsilon} \right) : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \left( \sum_j \left( \gamma^j \frac{\partial f^j}{\partial \rho} \right) + \boldsymbol{\Theta} : \dot{\boldsymbol{\rho}} \right) : \delta\rho \right] d\Omega = 0 \quad (2.46)$$

Considerando que  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\delta\rho$  podem ser valores arbitr\~arios em qualquer ponto do dom\~inio  $\Omega$ , os termos multiplicados por estas varia\~oes se anulam. Isso conduz \~as seguintes condi\~oes de otimalidade:

$$\dot{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\varepsilon} = - \sum_j \left( \gamma^j \frac{\partial f^j}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Theta} : \dot{\boldsymbol{\rho}} = - \sum_j \left( \gamma^j \frac{\partial f^j}{\partial \rho} \right) \quad (2.47)$$

associadas com as restri\~oes do problema:

$$\gamma^j \geq 0, \quad f^j \leq 0 \quad \text{e} \quad \gamma^j f^j = 0 \quad (2.48)$$

As restrições (2.48) são as famosas condições de Karush Kuhn-Tucker (conhecidas como condições de KKT).

Assumindo que os critérios de remodelamento podem ser expressos como uma soma de termos correspondentes à deformação e termos correspondentes à densidade, tem-se:

$$f^j(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}, \rho) = \phi^j(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}) - R^j(\rho) \quad (2.49)$$

Se o termo que envolve a deformação  $\phi^j$  é homogêneo de grau um na deformação:

$$\phi^j(\alpha \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}) = \alpha \phi^j(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}) \quad (2.50)$$

para todos os valores positivos de  $\alpha$ , então  $\phi^j$  pode ser expresso em termos de suas derivadas por:

$$\phi^j(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}) = \frac{\partial \phi^j(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.51)$$

Dessa forma, a otimização da taxa de variação do tensor de rigidez leva a:

$$\dot{\mathbf{C}} = \sum_j \left( \frac{\gamma^j}{\phi^j} \frac{\partial \phi^j}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \frac{\partial \phi^j}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \quad (2.52)$$

onde o símbolo  $\otimes$  representa o produto diádico  $\left( \frac{\partial \phi^j}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \frac{\partial \phi^j}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_{kl} = \left( \frac{\partial \phi^j}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_k \left( \frac{\partial \phi^j}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_l$ .

A equação (2.52) é simétrica, positivo-definida e aparece no contexto da Mecânica do Dano (SIMO e JU<sup>7</sup>, 1987, citado por JACOBS et al., 1997).

Como já definido anteriormente, a reposta do osso é determinada pelo erro de estímulo de tensão no nível do tecido:

$$e_e = \Psi_t - \Psi_t^* \quad (2.53)$$

onde  $\Psi_t^*$  é a constante do estado de atração. Quando a forma da energia de deformação da tensão efetiva é adotada, a equação (2.53) pode ser:

---

<sup>7</sup> SIMO, J. C.; JU, J. W. Strain and stress based continuum damage models – I Formulation. **International Journal of Solids and Structure**. v.23, n.7, p.821-840, 1987.

$$e_e = K_e \frac{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}}}{\rho^{2-\beta/2}} - \Psi_t^* \quad (2.54)$$

onde  $\beta$  é um expoente na equação do módulo de Young de materiais isotrópicos, em função da densidade ( $E = b\rho^\beta$ , onde  $b$  e  $\beta$  são constantes) e  $K_e$  é um conjunto de constantes envolvidas no modelo isotrópico.

Para determinar a resposta da remodelação óssea, dois critérios são formulados, um, não negativo, para o caso de reabsorção e outro para o caso de aposição:

$$f^r(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}, \rho) = (-e_e - w)\rho^{2-\beta/2} \quad (2.55)$$

$$f^a(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}, \rho) = (e_e - w)\rho^{2-\beta/2} \quad (2.56)$$

onde  $w$  é a meia largura da zona morta, conforme a Figura 2.23.

Na Figura 2.23 pode-se observar que na “zona morta”, (região escurecida) ambos os critérios de remodelamento são satisfeitos, enquanto que à direita e à esquerda da mesma sempre um dos critérios é violado e o outro satisfeito.

Observa-se que nesse desenvolvimento  $w$  pode ser nulo, assim tem-se:

$$f^r(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}, \rho) = \phi^r(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}) + R(\rho) \quad (2.57)$$

$$f^a(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}, \rho) = \phi^a(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}) + R(\rho) \quad (2.58)$$

onde considera-se:

$$\phi^r(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}) = -K_e \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.59)$$

$$\phi^a(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}) = K_e \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.60)$$

com o valor de  $K_e$  dado por:

$$K_e = n^{1/m_p} \rho_t^2 \sqrt{B} \quad (2.61)$$

e com  $\rho_t$ ,  $m_p$ ,  $n$  e  $B$  conforme definidos no item 2.4.1.

Considera-se para o termo relacionado com a densidade a expressão:

$$R(\rho) = -(\Psi_t^* + w)\rho^{2-\beta/2} \quad (2.62)$$

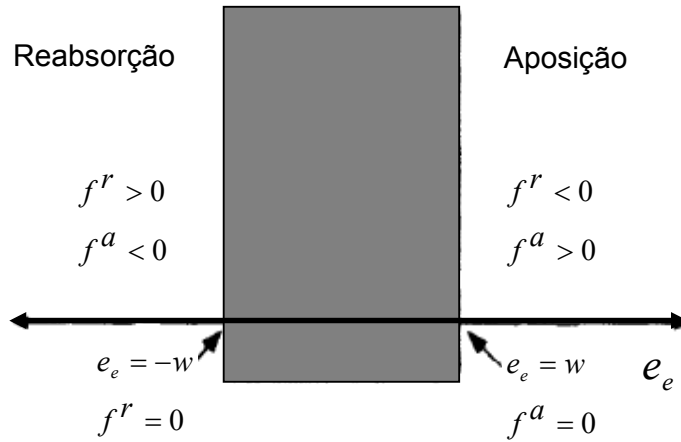


Figura 2.23 – Critério de remodelamento empregado por Beaupré<sup>8</sup> et al. (1990).

Fonte: JACOBS et al., 1997

Com as considerações anteriores, as equações (2.57) e (2.58) podem ser reescritas como:

$$f^r(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}, \rho) = -n^{1/m_p} \rho_t^2 \sqrt{B} \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} - (\Psi_t^* - w) \rho^{2-\beta/2} \quad (2.63)$$

$$f^a(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}, \rho) = n^{1/m_p} \rho_t^2 \sqrt{B} \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} - (\Psi_t^* + w) \rho^{2-\beta/2} \quad (2.64)$$

O tensor da taxa de variação da rigidez é definido pela diferenciação das equações (2.59) e (2.60), e pela substituição dessas derivadas na equação (2.52), resultando:

$$\dot{\mathbf{C}} = \begin{cases} -\gamma^r \frac{\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}} f^r \geq 0, & \text{se } f^a < 0 \\ 0I, & \text{se } f^r < 0, f^a < 0 \\ \gamma^a \frac{\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}} f^a < 0, & \text{se } f^a \geq 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

onde  $I$  é um tensor identidade de quarta ordem.

A equação (2.52) pode ser definida na forma final como:

$$\dot{\mathbf{C}} = \frac{\beta \dot{\rho}}{\rho} \frac{\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.66)$$

A densidade possui a mesma lei de evolução do caso isotrópico, definida na

<sup>8</sup> BEAUPRÉ, G. S.; ORR, T. E.; CARTER, D. R. Na approach for time-dependent bone modeling e remodeling-application: a preliminary remodeling simulation. **Journal of Orthopaedics**. v.8, p.662-670, 1990.

equação (2.25) mas agora reformulada com o critério  $f^j(\varepsilon, C, \rho) \leq 0$ :

$$\dot{\rho} = \begin{cases} -c_e \frac{f^r(\varepsilon, C, \rho)}{\rho^{2-\beta/2}} S_v(\rho), & \text{se } f^r \geq 0, f^a < 0 \\ 0, & \text{se } f^r < 0, f^a < 0 \\ c_e \frac{f^a(\varepsilon, C, \rho)}{\rho^{2-\beta/2}} S_v(\rho), & \text{se } f^r < 0, f^a \geq 0 \end{cases} \quad (2.67)$$

onde  $c_e$  é uma taxa constante e  $S_v(\rho)$  é um polinômio de grau cinco em função da densidade, associada à porosidade, dado pela equação (2.24).

### 2.4.3 Modelo proposto por García, Doblaré e Cegoñino

A teoria de remodelação óssea anisotrópica proposta por García, Doblaré e Cegoñino (2002) baseia-se nos princípios da Mecânica do Dano Contínuo. Mais especificamente, é uma teoria combinada de dano-reparo que considera que a evolução das variáveis internas (porosidade e anisotropia), bem como a influência dessa evolução sobre os parâmetros constitutivos elásticos, podem ser formulados sem referência a qualquer dano interno real.

A idéia é considerar uma variável de dano virtual, como uma medida da porosidade do tecido ósseo, direcionada pelo chamado tensor “*fabric*”. Em uma situação ideal, tem-se o osso íntegro, isotrópico e com porosidade nula.

A reabsorção óssea causa aumento na taxa de vazios enquanto que a formação óssea causa redução da porosidade ou reparação do osso. Dessa forma, na teoria do dano-reparo a evolução do dano pode ser negativa durante o processo de reparação, devido ao fornecimento de energia metabólica, que não é considerado no modelo puramente mecânico.

O tensor de dano  $\mathbf{D}$  é dado por:

$$\mathbf{D} = \mathbf{1} - \left( \frac{\rho}{\hat{\rho}} \right)^{\frac{\beta}{2}} \sqrt{A(\rho)} \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{1} - \mathbf{H}^2 \quad (2.68)$$

onde  $\hat{\rho}$  é a densidade máxima do osso ideal com porosidade nula,  $\mathbf{1}$  é o tensor unitário de segunda ordem,  $\hat{\mathbf{H}}$  é o tensor “*fabric*”, normalizado de tal forma que  $\det \hat{\mathbf{H}} = 1$ ,  $\mathbf{H}$  é um tensor intermediário, denominado de tensor de remodelamento que é usado como variável interna do modelo e  $A(\rho)$  é uma função que depende da

densidade aparente e que, segundo Doblaré e Garcia (2002), é definida por:

$$A(\rho) = \frac{B(\rho)}{B(\hat{\rho})} \hat{\rho}^{\beta(\rho) - \beta(\hat{\rho})} \quad (2.69)$$

onde  $B$  e  $\beta$ , conforme definido nas equações (2.2) e (2.3).

A tensão efetiva (relativa ao material não danificado), é definida por:

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{H}^{-1} \sigma \mathbf{H}^{-1} \quad (2.70)$$

Adotando-se o princípio da deformação equivalente e utilizando-se o tensor  $\tilde{\sigma}$ , encontra-se um tensor constitutivo localmente ortotrópico cujas direções principais de ortotropia estão alinhadas com os eixos principais do tensor  $\mathbf{D}$  (ou equivalentemente dos tensores  $\mathbf{H}$  e  $\hat{\mathbf{H}}$ ) e seus valores principais podem ser expressos em termos de  $\mathbf{H}$  e do módulo de elasticidade do tecido ósseo isotrópico ideal, logo:

$$\frac{1}{E_I} = \frac{1}{\hat{E}} \frac{1}{H_I^4}, \quad -\frac{\nu_{I II}}{E_{II}} = -\frac{\nu_{II I}}{E_I} = -\frac{\hat{\nu}}{\hat{E}} \frac{1}{H_I^2 H_{II}^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2G_{I II}} = \frac{1 + \hat{\nu}}{\hat{E}} \frac{1}{H_I^2 H_{II}^2} \quad (2.71)$$

onde  $\hat{E}$  e  $\hat{\nu}$  são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material isotrópico não danificado, respectivamente.

O estímulo mecânico  $\mathbf{Y}$  é definido como uma variável termodinamicamente associada a uma variável interna, que no caso é o tensor de remodelamento  $\mathbf{H}$ . Considerando a deformação ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) como uma variável mecânica independente:

$$\mathbf{Y} = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}} = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{H}} \Big|_{\boldsymbol{\varepsilon} = cte} = 2 \left[ 2\hat{G} \text{sym}[(\mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{H})(\mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon})] + \hat{\lambda} \text{tr}(\mathbf{H}^2 \boldsymbol{\varepsilon}) \text{sym}[\mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}] \right] \quad (2.72)$$

onde  $\hat{G}$ ,  $\hat{\lambda}$  são as constantes de Lamé do osso compacto ideal com porosidade nula e  $\psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$  é a função energia livre.

García, Doblaré e Cegoñino (2002) propõem que os critérios para os processos de reabsorção ( $r$ ) e formação ( $f$ ) óssea sejam funções quadráticas do estímulo mecânico:



$$\begin{cases} g^r = \frac{\sqrt{2}}{n^{1/m_p} \sqrt{B} \hat{\rho}^{2-\beta/8} A^{1/8} 27^{1/4}} (\mathbf{J}^{-1} : \mathbf{J}^{-1})^{1/4} - \frac{1}{(\Psi_t^* - w) \rho^{(16-5\beta)/8}} < 0 \\ g^f = n^{1/m_p} \sqrt{B} \hat{\rho}^{2-\beta/8} A^{1/8} \frac{3^{1/4}}{\sqrt{2}} (\mathbf{J} : \mathbf{J})^{1/4} - (\Psi_t^* + w) \rho^{(16-5\beta)/8} < 0 \end{cases} \quad (2.73)$$

onde  $\mathbf{J}$  é um tensor que mede a influência relativa das partes esférica e desviadora do estímulo no critério de dano:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{3}(1 - \omega_d) \text{tr}(\mathbf{Y}) \mathbf{1} + \omega_d \text{dev}(\mathbf{Y}) = \frac{1}{3}(1 - 2\omega_d) \text{tr}(\mathbf{Y}) \mathbf{1} + \omega_d \mathbf{Y} \quad (2.74)$$

com  $\omega_d \in [0, 1]$  sendo que  $\omega_d = 0$  corresponde a isotropia e  $\omega_d = 1$  corresponde a máxima anisotropia.

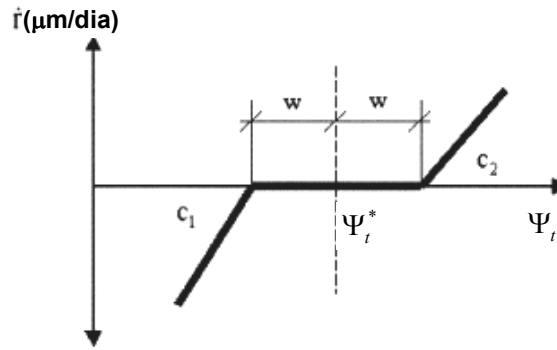


Figura 2.24 – Taxa de remodelamento ósseo como função do estímulo mecânico.

Fonte: (GARCÍA; DOBLARÉ; CEGOÑINO, 2002)

A Figura 2.24 ilustra o estímulo de equilíbrio ( $\Psi_t^*$ ) e a “zona morta” cuja meia largura é definida por ( $w$ ). As constantes  $c_1$  e  $c_2$  representam que as taxas de evolução do remodelamento podem ser distintas na região reabsorção e na região de formação óssea, respectivamente.

É importante destacar que esses critérios são isotrópicos no espaço do estímulo e anisotrópicos no espaço das tensões ou das deformações.

Considerando a lei de evolução associada ao dano, tal que a taxa do tensor de remodelamento  $\dot{\mathbf{H}}$  é:

$$\dot{\mathbf{H}} = \mu^r \frac{\partial g^r}{\partial \mathbf{Y}} + \mu^f \frac{\partial g^f}{\partial \mathbf{Y}} \quad (2.75)$$

onde  $\mu^r$  e  $\mu^f$  são os parâmetros de consistência para a reabsorção e para a

formação, respectivamente. Com as condições padrões de Kuhn-Tucker (KKT):

$$\mu^r, \mu^f \geq 0, \quad g^r, g^f \leq 0 \quad \text{e} \quad \mu^r g^r = \mu^f g^f = 0 \quad (2.76)$$

tem-se:

$$\begin{cases} \text{Reabsorção : } \dot{\mathbf{H}} = \mu^r \alpha^r A^{-1/8} \mathbf{J}^{-3} \hat{\mathbf{\omega}}_d \\ \text{Formação : } \dot{\mathbf{H}} = \mu^f \alpha^f A^{1/8} \mathbf{J} \hat{\mathbf{\omega}}_d \end{cases} \quad (2.77)$$

Na equação (2.77) considera-se o tensor  $\hat{\omega}_d$  como:

$$\hat{\omega}_d = \frac{1}{3}(1 - 2\omega_d)\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \omega_d \mathbf{I} \quad (2.78)$$

onde  $\mathbf{1}$  é o tensor unitário de segunda ordem,  $\mathbf{I}$  é o tensor unitário de quarta ordem e ainda:

$$\begin{cases} \alpha^r = \frac{-\sqrt{2}}{2n^{1/m_p} \sqrt{B} \hat{\rho}^{2-\beta/8} A^{1/8} 27^{1/4}} (\mathbf{J}^{-1} : \mathbf{J}^{-1})^{-3/4} \\ \alpha^f = \frac{\sqrt{2}}{4} n^{1/m_p} \sqrt{B} \hat{\rho}^{2-\beta/8} A^{1/8} 3^{1/4} (\mathbf{J} : \mathbf{J})^{-3/4} \end{cases} \quad (2.79)$$

Se o remodelamento ósseo é um problema de dano que depende do tempo, as condições de Kuhn-Tucker devem ser substituídas por uma equação constitutiva, para os parâmetros de consistência  $\mu$  como função da densidade aparente.

Para o caso isotrópico (como no item 2.4.1) a variação da densidade aparente é dada por:

$$\dot{\rho} = k \dot{S}_v \hat{\rho} \quad (2.80)$$

Resolvendo o problema de análise convexa dado pelas equações (2.75) e (2.76) e considerando a dependência do tempo, os parâmetros de consistência  $\mu$  são definidos por:

$$\begin{cases} \mu^r = \frac{3\beta A^{1/8}}{4\alpha^r} \frac{k \dot{S}_v}{\text{tr}(\mathbf{H}^{-2} \mathbf{J}^{-3} \mathbf{H} \hat{\mathbf{\omega}}_d)} \frac{\hat{\rho}}{\rho} \\ \mu^f = \frac{3\beta}{4\alpha^f} \frac{k \dot{S}_v}{A^{1/8} \text{tr}(\mathbf{H}^{-2} \mathbf{J} \mathbf{H} \hat{\mathbf{\omega}}_d)} \frac{\hat{\rho}}{\rho} \end{cases} \quad (2.81)$$

onde  $k$  é a razão entre a superfície disponível para remodelação e a superfície interna total.

A lei de evolução para o tensor de remodelamento  $\mathbf{H}$  é dada por:

$$\begin{cases} \text{Reabsorção : } \dot{\mathbf{H}} = \frac{3\beta \dot{\kappa} S_v}{4 \text{tr}(\mathbf{H}^{-2} \mathbf{J}^{-3} \mathbf{H} \hat{\mathbf{\omega}}_d)} \frac{\hat{\rho}}{\rho} \mathbf{J}^{-3} \hat{\mathbf{\omega}}_d \\ \text{Formação : } \dot{\mathbf{H}} = \frac{3\beta \dot{\kappa} S_v}{4 \text{tr}(\mathbf{H}^{-2} \mathbf{J} \mathbf{H} \hat{\mathbf{\omega}}_d)} \frac{\hat{\rho}}{\rho} \mathbf{J} \hat{\mathbf{\omega}}_d \end{cases} \quad (2.82)$$

considerando-se que se  $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$  não ocorre nem reabsorção e nem formação (“zona morta”).

De acordo com García, Doblaré e Cegoñino (2002), este modelo apresenta algumas propriedades muito importantes, das quais pode-se destacar:

- os critérios de remodelamento são isotrópicos no espaço do estímulo e anisotrópicos no espaço das tensões ou das deformações;
- se o tensor de remodelamento  $\mathbf{H}$  está alinhado com o tensor de tensões, a taxa da matriz de autovetores do tensor “fabric” desaparece. Nesta situação chega-se ao estado de equilíbrio direcional, onde as direções principais do tensor “fabric” coincidem com as direções principais dos tensores de tensão e de deformação;
- o tensor constitutivo é localmente ortotrópico e suas direções de ortotropia são alinhadas com os eixos principais do tensor de dano  $\mathbf{D}$ ;
- o modelo cumpre o princípio da dissipação mecânica mínima, oposto ao considerado normalmente pela Mecânica do Dano Contínuo.

#### 2.4.4 Modelo proposto por Doblaré e García

Este modelo é baseado naquele apresentado no item 2.4.3, onde foi tomada como variável independente a deformação.

Doblaré e García (2002) propõem que a variável independente seja agora a tensão e formulam um modelo de remodelação que pode-se chamar de complementar.

Adotando como referência o estímulo definido na equação (2.72) e impondo como variável independente a tensão ao invés da deformação, tem-se:

$$\mathbf{Y}^\sigma = \frac{\partial \psi_c(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}} = \frac{\partial \psi_c}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{H}} \Big|_{\sigma=cte} \quad (2.83)$$

$$\mathbf{Y}^\sigma = -2\mathbf{H}^{-2} \left[ \frac{1+\hat{\nu}}{\hat{E}} \text{sym}[(\mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}^{-1})(\mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\sigma})] - \frac{\hat{\nu}}{\hat{E}} \text{tr}(\mathbf{H}^{-2}\boldsymbol{\sigma}) \text{sym}[\mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\sigma}] \right] \quad (2.84)$$

onde  $\psi_c$  é a energia livre complementar expressa em função da tensão, que pode ser definida como:

$$\psi_c(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}) = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}) - \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}), \mathbf{H}) \quad (2.85)$$

Fazendo-se as simplificações, de acordo com o que foi mostrado no item 2.4.3, chega-se a conclusão que:

$$\mathbf{Y}^\sigma = -\mathbf{Y} \quad (2.86)$$

ou seja, o estímulo que utiliza a tensão como variável independente tem o sinal contrário do estímulo que utiliza a deformação como variável independente (DOBLARÉ e GARCÍA, 2002).

Os critérios definidos para este modelo são:

$$\begin{cases} g^r = \frac{\sqrt{2(1-\omega_d)}}{n^{1/m_p} \sqrt{B} \hat{\rho}^{2-\beta/8} A^{1/8} 27^{1/4}} (\mathbf{J}^{-1} : \mathbf{J}^{-1})^{1/4} - \frac{1}{(\Psi_t^* - w) \rho^{(16-5\beta)/8}} < 0 \\ g^f = n^{1/m_p} \sqrt{B} \hat{\rho}^{2-\beta/8} A^{1/8} \frac{3^{1/4}}{\sqrt{2(1-\omega_d)}} (\mathbf{J} : \mathbf{J})^{1/4} - (\Psi_t^* + w) \rho^{(16-5\beta)/8} < 0 \end{cases} \quad (2.87)$$

com  $\mathbf{J}$  definido na equação (2.74).

Seguindo as considerações feitas no item 2.4.3, a evolução do tensor de remodelamento fica:

$$\begin{cases} \text{Reabsorção : } \dot{\mathbf{H}} = \mu^r \alpha^r A^{-1/8} \mathbf{J}^{-3} \hat{\boldsymbol{\omega}}_d \sqrt{1-\omega_d} \\ \text{Formação : } \dot{\mathbf{H}} = \mu^f \alpha^f A^{1/8} \mathbf{J} \hat{\boldsymbol{\omega}}_d \frac{1}{\sqrt{1-\omega_d}} \end{cases} \quad (2.88)$$

e os parâmetros de consistência, agora podem ser expressos por:

$$\begin{cases} \mu^r = \frac{3\beta A^{1/8}}{4\alpha^r} \frac{k\dot{r}S_v}{\text{tr}(\mathbf{H}^{-2} \mathbf{J}^{-3} \mathbf{H} \hat{\boldsymbol{\omega}}_d)} \frac{\hat{\rho}}{\rho} \frac{1}{\sqrt{1-\omega_d}} \\ \mu^f = \frac{3\beta}{4\alpha^f} \frac{k\dot{r}S_v}{A^{1/8} \text{tr}(\mathbf{H}^{-2} \mathbf{J} \mathbf{H} \hat{\boldsymbol{\omega}}_d)} \frac{\hat{\rho}}{\rho} \sqrt{1-\omega_d} \end{cases} \quad (2.89)$$

Finalmente, a lei de evolução para o tensor de remodelamento  $\mathbf{H}$  é dada por:

$$\begin{cases} \text{Reabsorção : } \dot{\mathbf{H}} = \frac{3\beta \, k\dot{S}_v}{4 \, tr(\mathbf{H}^{-2} \mathbf{J}^{-3} \mathbf{H} \hat{\mathbf{\omega}}_d)} \frac{\hat{\rho}}{\rho} \mathbf{J}^{-3} \hat{\mathbf{\omega}}_d \\ \text{Formação : } \dot{\mathbf{H}} = \frac{3\beta \, k\dot{S}_v}{4 \, tr(\mathbf{H}^{-2} \mathbf{J} \mathbf{H} \hat{\mathbf{\omega}}_d)} \frac{\hat{\rho}}{\rho} \mathbf{J} \hat{\mathbf{\omega}}_d \end{cases} \quad (2.90)$$

e resulta uma lei idêntica à lei definida no modelo que utiliza a deformação como variável independente (equação (2.82)).

#### 2.4.5 Modelo proposto por Ramtani e Zidi

Nesse modelo a teoria da adaptação de materiais elásticos danificados é proposta para o processo fisiológico de remodelação do osso danificado. Esta teoria é fundamentada na termodinâmica do contínuo.

Pretende-se definir uma nova lei de remodelamento ósseo e restrições termodinâmicas, com a consideração de pequenas deformações e processo isotérmico (RAMTANI e ZIDI, 2001).

As hipóteses fundamentais assumidas nesse modelo são:

- a porosidade da matriz óssea é afetada pelo histórico de deformações do osso, pela adição ou remoção de massa da matriz e pela presença de microfissuras.
- a transferência de massa ocorre como resultado de uma reação bioquímica que é intermediada pelas células ósseas. A energia interna e a entropia também podem ser transferidas para ou da matriz óssea por essas reações químicas.
- o fluido extracelular está sempre em contato com o plasma sanguíneo.
- o tempo característico das reações químicas é muito maior do que o tempo característico associado à perfusão (passagem) do plasma sanguíneo no osso, onde qualquer excesso de calor gerado pelas reações químicas é rapidamente carregado pela circulação, ou seja, o processo é isotérmico.

Huiskes (1997) estabelece que o desenvolvimento das microfissuras é o estímulo para o remodelamento ósseo. Dessa forma, o processo fisiológico contínuo de reabsorção e formação não faz sentido sem o processo de reparação das microfissuras, o reparo ósseo é um fenômeno biológico bem conhecido e o

desenvolvimento de microdano está automaticamente relacionado ao histórico do carregamento dinâmico.

A teoria proposta por Ramtani e Zidi (2001), em um processo considerado quase-estático e isotérmico, pode ser descrita pelas equações do gradiente de deformação, do balanço de massa e do balanço do momento linear.

A equação do balanço de momento linear na forma diferencial é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{ki}}{\partial y_k} + \gamma \phi \mathbf{b}_i + \mathbf{p}_i = \gamma \phi \dot{\mathbf{v}}_i \quad (2.91)$$

onde  $\mathbf{T}_{ki}$  é o tensor de tensões de Cauchy,  $\gamma$  é a densidade do material que compõe a matriz óssea,  $\phi$  é a fração de volume ósseo (volume sólido), na configuração deformada,  $\mathbf{b}_i$  são as forças de corpo,  $\mathbf{p}_i$  é a força perfusante (representa o efeito da passagem do sangue pelo osso) aplicada à matriz de estrutura porosa e  $\mathbf{v}_i = \frac{\partial y_i}{\partial t}$  é a velocidade do contínuo no tempo  $t$ .

Considera-se uma superfície fixa arbitrária, confinada em um volume  $\Omega$  da matriz porosa. Por causa da massa que está sendo adicionada ao corpo, o teorema tradicional de transporte de massa é modificado como segue (COWIN e HEGEDUS, 1976 e COUSSY, 1995):

$$\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t} \int_{\Omega} \gamma \phi g \, d\Omega = \int_{\Omega} (mg + \gamma \phi \dot{g}) \, d\Omega \quad (2.92)$$

onde  $g$  é uma propriedade qualquer do material por unidade de massa e  $m$  é a taxa com a qual a massa por unidade de volume é adicionada ou removida da matriz porosa (vem das reações químicas). Para o caso onde  $g=1$  a equação (2.92) resulta em:

$$\gamma \overline{\phi} + \gamma \phi \mathbf{L}_{kk} = m \quad (2.93)$$

que é a expressão local do balanço de massa para a matriz porosa. Considera-se

$\mathbf{L}_{kk} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$ , o gradiente de velocidades.

A densidade aparente  $\rho$  da estrutura porosa danificada é expressa por:

$$\rho = \gamma \phi \quad (2.94)$$

Analogamente ao conceito de tensão efetiva ou de deformação efetiva (CHABOCHE, 1988, entre outros) é introduzida a fração de volume ósseo efetiva na configuração de referência indeformada ( $\xi^d$ ):

$$\xi^d = (1-d)\xi = J\phi \quad (2.95)$$

onde  $\xi$  é a fração de volume ósseo na configuração de referência indeformada,  $d$  é a variável escalar de dano (se  $d = 0$  tem-se o material íntegro e se  $d = 1$  tem-se o material totalmente danificado) e  $J$  é a variação de volume local, definida por:

$$J = \det \mathbf{F} \quad \mathbf{F}_{ik} = \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \quad y_i = \tilde{y}_i(x_k, t) \quad (2.96)$$

onde  $\mathbf{F}_{ik}$  é o gradiente de deformação e  $\tilde{y}_i$  define a localização da partícula material  $x_k$  no tempo  $t$ , com  $i \geq 1$  e  $k \leq 3$ .

Segundo Ramtani e Zidi (2001)  $\xi$  e  $\xi^d$  podem variar sem mudança do estado de referência para as deformações se for assumido que, para temperatura constante e força de corpo nula, existe um único estado de referência inicial para todos os valores de  $\xi$ . Assim, a densidade da estrutura porosa danificada é definida por:

$$\rho = (1-d) \frac{\gamma \xi}{J} \quad (2.97)$$

Quando a equação (2.97) é substituída na equação (2.93), uma nova relação entre a taxa de variação da variável de remodelamento  $\dot{\xi}$ , a formação ou reabsorção de massa  $m$  e a taxa de dano  $\dot{d}$  é estabelecida (RAMTANI e ZIDI, 1999):

$$\dot{\xi} = J \frac{m}{\gamma(1-d)} + \frac{\xi \dot{d}}{(1-d)} \quad (2.98)$$

O primeiro termo da equação (2.98) está relacionado a abertura elástica das microfissuras existentes e o segundo termo é devido ao crescimento de dano (termo acoplado).

No caso de carregamentos que não geram danos futuros, a parcela de crescimento de dano não é relevante para o processo de remodelamento e pode-se considerar:

$$\dot{\xi} = J \frac{m}{\gamma(1-d)} \quad (2.99)$$

similar à equação obtida por Cowin e Hegedus (1976) com  $d = 0$ .

Da termodinâmica, define-se a forma local da desigualdade de entropia como:

$$-\gamma\phi(\eta\dot{\theta} + \dot{\psi}) + \mathbf{T}_{ki}\mathbf{L}_{ik} - \frac{\mathbf{Q}_k}{\theta} \frac{\partial\theta}{\partial y_k} + h^* \geq 0 \quad (2.100)$$

onde  $\eta$  é a entropia específica,  $\theta$  a temperatura local,  $\psi$  a densidade de energia livre de Helmholtz,  $\mathbf{Q}_k$  o vetor de fluxo de calor e  $h^*$  é a diferença de energia transferida devida a interação local entre a matriz óssea e o perfusante (líquido).

As hipóteses constitutivas e as restrições termodinâmicas são definidas por:

$$\psi = (1-d)\tilde{\psi}(\theta, \mathbf{F}_{ik}, \xi) \quad (2.101)$$

$$\eta = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \quad (2.102)$$

$$\mathbf{T}_{ij} = (1-d)^2 \frac{\gamma\xi}{J} \left( \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\mathbf{F}_{ik}} \mathbf{F}_{jk} \right) \quad (2.103)$$

$$-\xi \left( \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\xi} \right) (1-d)m - \frac{\mathbf{Q}_k}{\theta} \frac{\partial\theta}{\partial y_k} + h^* \geq 0 \quad (2.104)$$

$$-\frac{\gamma\xi}{J} (1-d) \left( \xi \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\xi} - \tilde{\psi} \right) \dot{d} \geq 0 \quad (2.105)$$

Aplicando-se a teoria proposta para um processo quase estático e isotérmico, tem-se o balanço de momento linear definido como:

$$\frac{\partial\sigma_{ki}}{\partial y_k} + \gamma\phi \mathbf{b}_i = 0 \quad (2.106)$$

onde despreza-se o termo relacionado com a inércia (hipótese quase-estática) e a força perfusante  $\mathbf{p}_i$ .

Para a hipótese de pequenas deformações, as variáveis independentes  $\xi$  e  $\mathbf{F}_{ik}$  são modificadas para  $e$  (medida da variação na fração de volume a partir de



uma fração de volume de referência  $\xi_0$ ) e para  $\mathbf{E}_{ij}$ , respectivamente.

$$e = \xi - \xi_0 \quad (2.107)$$

As novas funções serão denotadas por barras superpostas, como:

$$\bar{m}(e, \mathbf{E}_{ij}, d) = \tilde{m}(\xi, \mathbf{F}_{ik}, d) \quad (2.108)$$

$$\bar{\psi}(e, \mathbf{E}_{ij}) = \tilde{\psi}(\xi, \mathbf{F}_{ik}) \quad (2.109)$$

onde o tensor de deformações linearizado  $E$  é representado, em termos de gradiente de deslocamentos, por:

$$\mathbf{E}_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.110)$$

A equação constitutiva para as tensões torna-se:

$$\sigma_{ij} = (1-d)^2 \frac{\gamma(\xi_0 + e)}{[\det(1 + 2\mathbf{E})]^{1/2}} \left( \mathbf{F}_{ik} \mathbf{F}_{jl} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{E}_{kl}} \right) \quad (2.111)$$

e a equação (2.98) pode ser reduzida a

$$\dot{e} = \frac{1}{(1-d)} \left\{ \bar{\Phi}(e, \mathbf{E}_{ij}, d) + (\xi_0 + e) \dot{d} \right\} \quad (2.112)$$

onde

$$\bar{\Phi}(e, \mathbf{E}_{ij}, d) = \frac{1}{\gamma} \bar{m}(e, \mathbf{E}_{ij}, d) [\det(1 + 2\mathbf{E})]^{1/2} \quad (2.113)$$

Baseadas em justificativas físicas substanciais (SCOTT<sup>9</sup>, 1957; BONFIELD e LI<sup>10</sup>, 1966, citado por RAMTANI e ZIDI, 2001) as aproximações para  $\bar{\Phi}$  e  $\bar{\psi}$  são obtidas por expansões de séries de Taylor, negligenciando termos de terceira ordem, assim:

$$\bar{\Phi}(e, \mathbf{E}_{ij}, d) \cong a(e, d) + \mathbf{A}_{ij}(e, d) \mathbf{E}_{ij} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{ijk} (e, d) \mathbf{E}_{ij} \mathbf{E}_{km} \quad (2.114)$$

<sup>9</sup> SCOTT, J. H. The mechanical basis of bone formation. **Journal of Bone and Joint Surgery**. v.39B, p.134-144, 1957.

<sup>10</sup> BONFIELD, W.; LI, C. H. Deformation and fracture of bone. **Journal of Applied Physics**. v.37, p.869-875, 1966.

$$\bar{\psi}(e, \mathbf{E}_{ik}) \cong \bar{\psi}(e, 0) + \frac{1}{2\gamma} \mathbf{C}_{ijk}(e) \mathbf{E}_{ij} \mathbf{E}_{km} \quad (2.115)$$

onde:

$$a(e, d) = \bar{\Phi}(e, 0, d) \quad (2.116)$$

$$\mathbf{A}_{ij}(e, d) = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \mathbf{E}_{ij}}(e, 0, d) \quad (2.117)$$

$$\mathbf{B}_{ijk}(e, d) = \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \mathbf{E}_{ij} \partial \mathbf{E}_{km}}(e, 0, d) \quad (2.118)$$

$$\mathbf{C}_{ijk}(e) = \gamma \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \mathbf{E}_{ij} \partial \mathbf{E}_{km}}(e, 0) \quad (2.119)$$

Quando a equação (2.115) é substituída na (2.111) para as tensões, os termos de segunda ordem nos gradientes de deslocamentos são negligenciados e obtém-se

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = (1-d)^2 \gamma (\xi_0 + e) \mathbf{C}_{ijkl}(e) \mathbf{E}_{kl} \quad (2.120)$$

que é uma Lei de Hooke modificada, onde a proporcionalidade entre tensões e deformações depende da fração de volume do material presente.

A expressão para a taxa de remodelamento, na presença de microfissuras, é dada por:

$$\dot{e} = \frac{1}{(1-d)} \left[ a(e, d) + \mathbf{A}_{ij}(e, d) \mathbf{E}_{ij} + (\xi_0 + e) \dot{d} \right] \quad (2.121)$$

As funções  $\mathbf{C}_{ijkl}(e)$ ,  $a(e, d)$  e  $\mathbf{A}_{ij}(e, d)$  caracterizam as propriedades do material danificado e existem poucos resultados experimentais para aferir estas funções, portanto será suposto que as mesmas são independentes do dano.

Uma primeira aproximação para estas funções é uma aproximação polinomial definida como em Cowin e Hegedus (1976).

$$\mathbf{C}_{ijkl}(e) = \frac{1}{\xi_0 + e} \left\{ \xi_0 \mathbf{C}_{ijkl}^0 + e \mathbf{C}_{ijkl}^1 \right\} \quad (2.122)$$

$$a(e, d) = a(e) = a_0 + a_1 e + a_2 e^2 \quad (2.123)$$

$$\mathbf{A}_{ij}(e, d) = \mathbf{A}_{ij}(e) = \mathbf{A}_{ij}^0 + \mathbf{A}_{ij}^1 e \quad (2.124)$$

Com estas aproximações, as equações (2.120) e (2.121) são reescritas como

$$\sigma_{ij} = (1-d)^2 \{ \xi_0 \mathbf{C}_{ijkl}^0 + e \mathbf{C}_{ijkl}^1 \} \mathbf{E}_{kl} \quad (2.125)$$

$$\dot{e} = \alpha [c - 2be + e^2] \quad (2.126)$$

onde tem-se:

$$\alpha = \frac{a_2}{(1-d)} \quad (2.127)$$

$$b = - \frac{(a_1 + \dot{d} + \mathbf{A}_{ij}^1 \mathbf{E}_{ij})}{a_2} \quad (2.128)$$

$$c = \frac{(a_0 + \xi_0 \dot{d} + \mathbf{A}_{ij}^0 \mathbf{E}_{ij})}{a_2} \quad (2.129)$$

considerando  $\mathbf{C}_{ijkl}^0, \mathbf{C}_{ijkl}^1, a_0, a_1, a_2, \mathbf{A}_{ij}^0$  e  $\mathbf{A}_{ij}^1$ , as constantes que representam todas as propriedades dos materiais.

Tratando da caracterização do dano, a derivação das forças de dano é feita pelo uso das restrições dano-dissipativas que podem ser adaptadas da equação (2.105) por:

$$- \left( (\xi_0 + e) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial e} - \bar{\psi} \right) \dot{d} \geq 0 \quad (2.130)$$

que, com o suporte das equações (2.115) e (2.122) a (2.124), torna-se:

$$\left[ \left( \bar{\psi}(e, 0) - (\xi_0 + e) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial e} \bar{\psi}(e, 0) \right) + \left\{ \frac{1}{2\gamma(\xi_0 + e)} (\mathbf{C}_{ijkl}^1 - \mathbf{C}_{ijkl}^0) + \frac{1}{2\gamma(\xi_0 + e)} (\xi_0 \mathbf{C}_{ijkl}^0 + e \mathbf{C}_{ijkl}^1) \right\} \mathbf{E}_{ij} \mathbf{E}_{kl} \right] \dot{d} \geq 0 \quad (2.131)$$

Entretanto pode-se escolher a função de energia livre, tal que a equação (2.131) se reduz a

$$\left[ \bar{\psi}(e,0) + \left( \frac{1}{2\gamma(\xi_0 + e)} (\xi_0 \mathbf{C}_{ijkl}^0 + e \mathbf{C}_{ijkl}^1) \right) \mathbf{E}_{ij} \mathbf{E}_{kl} \right] \dot{d} \geq 0 \quad (2.132)$$

que é reescrita da seguinte forma:

$$-\mathbf{Y} \dot{d} \geq 0 \quad (2.133)$$

com

$$-\mathbf{Y} = \bar{\psi}(e,0) + \left( \frac{1}{2\gamma(\xi_0 + e)} (\xi_0 \mathbf{C}_{ijkl}^0 + e \mathbf{C}_{ijkl}^1) \right) \mathbf{E}_{ij} \mathbf{E}_{kl} = \bar{\psi}(e, \mathbf{E}_{ik}) = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \dot{d}} \quad (2.134)$$

Como  $-\mathbf{Y}$  é uma função quadrática, isso leva a já conhecida condição de crescimento de dano:

$$\dot{d} \geq 0 \quad (2.135)$$

Com isso conclui-se que a função energia não danificada  $-\mathbf{Y} = \bar{\psi}(e, \mathbf{E}_{ik})$  é a força termodinâmica (taxa de liberação da energia de dano adaptativa) conjugada da variável de dano  $d$ , que controla a propagação e a interrupção das microfissuras.

Quando  $\xi_0 = 1$  e  $e = 0$  a taxa de liberação da energia adaptativa proposta se reduz à força de dano escalar,  $\psi^0(\mathbf{E}_{ik})$  (CHABOCHE, 1988).

Para completar a proposta de modelo constitutivo, um mecanismo de dano elástico adaptativo é caracterizado para descrever as possíveis degradações progressivas das propriedades mecânicas do osso durante o processo de remodelamento.

Para isso será empregada a taxa de liberação da energia adaptativa para caracterizar as condições de carga/descarga do dano que por conveniência de notação será definida como:

$$\mathbf{Y}^* = |-\mathbf{Y}| = \bar{\psi}(e, \mathbf{E}_{ik}) \quad (2.136)$$

O estado de dano no material é caracterizado pelo critério de dano, com a seguinte forma funcional

$$l(\mathbf{Y}^*, k_t) \equiv \mathbf{Y}_t^* - k_t \leq 0 \quad t \in \mathbf{R}_+ \quad (2.137)$$

onde  $k_t$  representa a parcela de dano (barreira de energia) no tempo corrente  $t$ .

Para descrever o crescimento do microdano (microfissuras) sem considerar

as interações das microfissuras, uma lei geral de evolução é definida por:

$$\dot{d} = \dot{\lambda} H(\mathbf{Y}_t^*, d_t, k_0) \quad \dot{k}_t = \dot{\lambda} \quad (2.138)$$

onde  $\dot{\lambda} \geq 0$  é o parâmetro de consistência que define as condições de carga/descarga do dano, de acordo com as condições de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad (2.139)$$

$$l(\mathbf{Y}_t^*, k_t) \leq 0 \quad (2.140)$$

$$\dot{\lambda} l(\mathbf{Y}_t^*, k_t) = 0 \quad (2.141)$$

Ramtani e Zidi (2001) definem que para derivar o parâmetro de consistência de dano devem ser consideradas duas situações possíveis:

- se  $l(\mathbf{Y}_t^*, k_t) \leq 0$  o critério de dano não é satisfeito e pela condição (2.139) tem-se que  $\dot{\lambda} = 0$  e pela condição (2.138)  $\dot{d} = 0$  e não haverá dano futuro;
- se  $\dot{\lambda} \geq 0$ , ocorre dano futuro e pela condição (2.141)  $l(\mathbf{Y}_t^*, k_t) = 0$ . O valor de  $\dot{\lambda} \geq 0$  é determinado pela condição de consistência de dano.

Em suma, as equações apresentadas para a teoria proposta consiste no equilíbrio da equação (2.106), onde, para os termos de primeira ordem na deformação,  $\rho$  pode ser reescrita como:

$$\rho = (1 - d) \gamma (\xi_0 + e) (1 - \mathbf{E}_{kk}) \quad (2.142)$$

#### 2.4.6 Modelo proposto por McNamara e Prendergast

Os estímulos de remodelamento ósseo utilizados na definição dos modelos propostos por McNamara e Prendergast (2007) são: deformação, dano, dano e deformação combinados e também, ou deformação ou dano, com remodelamento adaptativo de dano priorizado quando o dano fica acima de um nível crítico.

A componente de deformação do estímulo de remodelamento é calculada como a variação da densidade da energia de deformação, denotada por  $U^j$  na localização  $j$ , dada por:

$$U^j = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^j : \mathbf{E}^j \boldsymbol{\varepsilon}^j}{2\rho^j} \quad (2.143)$$

onde  $\mathbf{E}^j$  é o módulo de elasticidade (MPa) do material,  $\boldsymbol{\varepsilon}^j$  é o tensor de deformação e  $\rho^j$  é a densidade aparente do material ( $\text{g/cm}^3$ ).

O estímulo de remodelamento ósseo relacionado com a deformação é definido por:

$$S_{\text{deformação}}^j = U^j(t) - U_{\text{ref}} \quad (2.144)$$

onde  $U_{\text{ref}}$  é o estímulo de referência calculado, a partir dos valores de  $E$  e de  $\rho$  do osso, no equilíbrio homeostático (equilíbrio do organismo com relação às funções e com relação à composição química de seus fluidos e tecidos).

O critério utilizado para o remodelamento em termos de deformações é:

- (i) se  $0 < \boldsymbol{\varepsilon}^j < 1000\mu\boldsymbol{\varepsilon}$ , então existe reabsorção e  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ref}} = 1000\mu\boldsymbol{\varepsilon}$
- (ii) se  $1000\mu\boldsymbol{\varepsilon} < \boldsymbol{\varepsilon}^j < 2000\mu\boldsymbol{\varepsilon}$ , então existe o equilíbrio do remodelamento e  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ref}} = \boldsymbol{\varepsilon}^j$ , portanto,  $S_{\text{deformação}}^j = 0$
- (iii) se  $2000\mu\boldsymbol{\varepsilon} < \boldsymbol{\varepsilon}^j < 3500\mu\boldsymbol{\varepsilon}$ , então existe formação e  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ref}} = 2000\mu\boldsymbol{\varepsilon}$

A componente de dano do estímulo é calculada assumindo que, mesmo no equilíbrio do remodelamento (intervalo da “zona morta”), existe um microdano homeostático no tecido ósseo vivo.

O processo de reparo proposto, diferente do utilizado na abordagem da Mecânica do Dano Contínuo, é modelado como remoção ou substituição dos elementos de dano, quando o dano acumulado ( $\omega$ ) ultrapassa o nível crítico de dano ( $\omega_{\text{crit}}$ ).

O estímulo de remodelamento adaptativo de dano é a diferença entre o dano acumulado e o dano crítico, definido por:

$$\Delta\omega = \omega - \omega_{\text{crit}} \quad (2.145)$$

com  $\omega < \omega_{\text{crit}}$ , o dano acumula de forma que:

$$\Delta\omega = \int_0^t \dot{\omega} dt \quad (2.146)$$

Se  $\omega = 1$  define a ruptura do material e se a taxa de acumulação de dano é assumida linear, então, a taxa de formação de dano pode ser definida pela regra de Miner (MCNAMARA e PRENDERGAST, 2007):

$$\dot{\omega} = \frac{1}{N_f} \quad (2.147)$$

onde  $N_f$  é o número de ciclos necessários para a ruptura do material na tensão considerada. Para o osso, de forma geral,  $N_f$  pode ser calculado pela seguinte relação empírica (CARTER<sup>11</sup> et al., 1976, citado por MCNAMARA e PRENDERGAST, 2007)

$$\log N_f = C_1 \log \sigma^j + C_2 T + C_3 \rho^j + C_4 \quad (2.148)$$

onde  $\sigma^j$  é a tensão cíclica (MPa),  $T$  é a temperatura (°C) e  $C_i$  são constantes empíricas. Os valores utilizados no trabalho de McNamara e Prendergast, (2007) para os parâmetros da equação (2.148) são definidos na Tabela 2.4.

Tabela 2.4 – Parâmetros utilizados no algoritmo de remodelamento ósseo

PARÂMETRO	VALOR
$\rho$ (G/CM <sup>3</sup> )	0,67
T (°C)	37
$C_1$	-7,789
$C_2$	-0,0206
$C_3$	2,364
$C_4$	15,470
$C_E$ (MPa)	6000

Fonte: MCNAMARA e PRENDERGAST, 2007

O dano crítico ( $\omega_{crit}$ ) é calculado como a quantidade de dano que seria acumulada em um ciclo de 3500  $\mu\epsilon$ . A tensão correspondente a esta deformação foi calculada de acordo com a lei de Hooke e foi usada para estimar a taxa de

<sup>11</sup> CARTER, D. R.; HAYES, W. C.; SCHURMAN, D. J. Fatigue on compact bone II. Effects of microstructure and density. **Journal of Biomechanics**. v.9, p.211-218, 1976.

acumulação de dano no remodelamento, de acordo com a equação (2.147).

O valor crítico do dano, obtido segundo as condições descritas, foi  $\omega_{crit} = 2,6 \times 10^{-10}$  (MCNAMARA e PRENDERGAST, 2007).

O estímulo de remodelamento ósseo adaptativo do dano é definido por:

$$S_{dano}^j = \Delta \omega^j \quad (2.149)$$

No modelo proposto, o dano é acumulado durante as iterações para todos os níveis de deformação e continua acumulando até  $\omega > \omega_{crit}$ . A partir disso, ocorre a reabsorção e conseqüente remoção do tecido ósseo danificado.

As regras da mecano-regulação para a remodelação óssea são apresentadas nas equações (2.150) a (2.153) e em todas elas a taxa de variação da densidade é predita a partir do estímulo calculado.

(i) estímulo de deformação:

$$\frac{d\rho^j}{dt} = C_I S_{deformação}^j \quad (2.150)$$

(ii) estímulo de dano:

$$\frac{d\rho^j}{dt} = C_{II} S_{dano}^j \quad (2.151)$$

(iii) estímulo de dano e deformação combinados (Figura 2.25):

$$\frac{d\rho^j}{dt} = C_I S_{deformação}^j + C_{II} S_{dano}^j \quad (2.152)$$

(iv) estímulo de dano ou de deformação, onde a remoção do dano é priorizada (Figura 2.26):

$$\begin{aligned} \omega < \omega_{crit} \quad \frac{d\rho^j}{dt} &= C_I S_{deformação}^j \\ \omega > \omega_{crit} \quad \frac{d\rho^j}{dt} &= C_{II} S_{dano}^j \end{aligned} \quad (2.153)$$

onde  $\omega_{crit}$  é a quantidade crítica de dano acumulado que provoca remodelamento como um processo de reparação.

Observa-se que  $C_I$  é uma constante que governa a taxa de remodelamento em resposta ao estímulo de deformação e  $C_{II}$  é uma constante que governa a taxa



de remodelamento em resposta ao estímulo de dano.

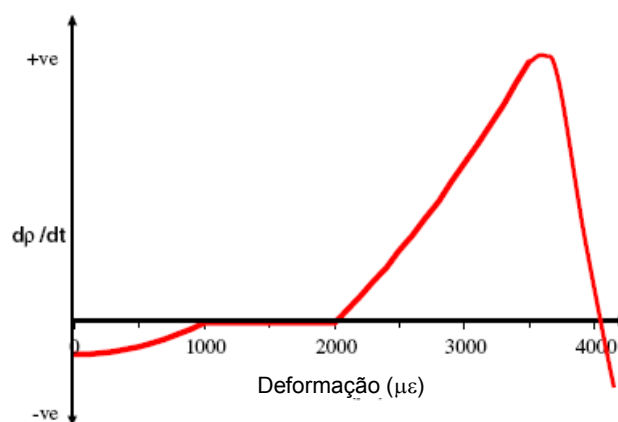


Figura 2.25 – Adaptação do osso proposta de acordo com a regra de mecano-regulação onde o remodelamento é governado por deformação e dano combinados.

Fonte: MCNAMARA e PRENDERGAST, 2007

Na falta de valores determinados experimentalmente para as taxas de remodelamento é necessário estimá-las em resposta à deformação e ao dano. Uma ilustração simplificada da relação esperada entre o estímulo e a massa óssea é apresentada na Figura 2.25 e na Figura 2.26

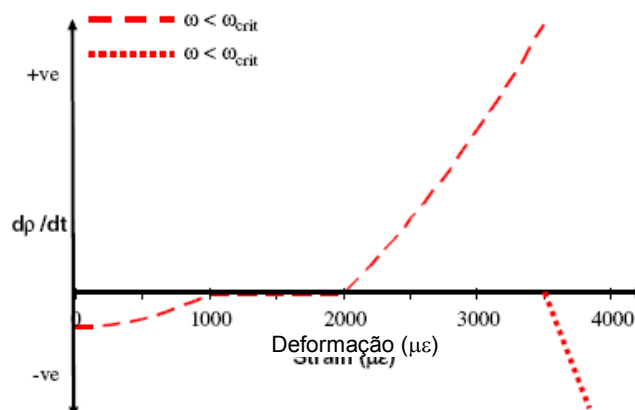


Figura 2.26 – Adaptação do osso proposta de acordo com a regra de mecano-regulação onde a remodelação é governada por deformação ou dano, com dano priorizado quando  $\omega > \omega_{crit}$ .

Fonte: MCNAMARA e PRENDERGAST, 2007

A densidade é determinada através do Método de Euler Progressivo, assim:

$$\rho_{i+1}^j = \rho_i^j + \frac{d\rho^j}{dt} \Delta t \quad (2.154)$$

São impostos limites superior e inferior para  $\rho_i$  de forma que as propriedades do tecido ósseo e da medula sejam limitadas às propriedades inicialmente definidas (MCNAMARA e PRENDERGAST, 2007).

Usando a densidade predita, as propriedades elásticas locais são calculadas de acordo com a seguinte relação:

$$E_{i+1} = C_e \rho_{i+1}^3 \quad (2.155)$$

onde  $C_e$  (MPa) é uma constante que governa a relação entre o módulo de elasticidade e a densidade.

#### 2.4.7 Modelo proposto por Barbero, Greco e Lonetti

Antes de definir a formulação, é muito importante ressaltar que o modelo proposto por Barbero, Greco e Lonetti (2005) não é específico para ossos, mas é descrito neste trabalho por se tratar de um modelo para materiais que têm dano e reparação associados (inclusive os ossos), além de utilizar uma abordagem termodinâmica com variáveis internas, que vai ao encontro do objetivo deste trabalho.

Na formulação proposta é estabelecida a associação da reparação, do dano e da plasticidade, baseada na termodinâmica generalizada, na qual variáveis internas são introduzidas nas relações constitutivas termodinâmicas para descrever o processo inelástico no estado atual do material (BARBERO, GRECO e LONETTI, 2005).

As equações constitutivas são termodinamicamente consistentes com a desigualdade de Clausius-Duhem:

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla T \geq 0 \quad (2.156)$$

onde  $\sigma$  é o tensor de tensões,  $\varepsilon$  é o tensor de deformações,  $\rho$  representa a densidade de massa,  $\psi$  é a Energia Livre de Helmholtz específica,  $s$  denota a entropia específica,  $T$  é a temperatura absoluta e  $q$  representa o fluxo de calor.

A teoria proposta é puramente mecânica, e considera a hipótese de pequenas deformações. Sem perda de generalidade, a decomposição de deformações aditivas é considerada consistente com a hipótese de pequenas deformações, pela qual a deformação total é considerada uma função linear das parcelas elástica e plástica.

As variáveis internas são introduzidas na desigualdade (2.156) para descrever os efeitos da degradação e da reparação:

$$\varphi^d = \varphi^d(\mathbf{D}, \delta) \in \mathfrak{Z}^d \quad \varphi^p = \varphi^p(\boldsymbol{\varepsilon}^p, p) \in \mathfrak{Z}^p \quad \varphi^h = \varphi^h(\mathbf{H}, \mu) \in \mathfrak{Z}^h \quad (2.157)$$

onde  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \mathbf{H})$  são as variáveis tensoriais associadas aos mecanismos de dano ( $d$ ), plasticidade ( $p$ ) e reparação ( $h$ ) e  $(\delta, p, \mu)$  são variáveis escalares associadas aos mesmos mecanismos, respectivamente. Considera-se  $\mathfrak{Z}^i$  os espaços dos domínios correspondentes, com  $i = (d, p, h)$

O estado termodinâmico real pode ser descrito pela Energia Livre de Helmholtz específica,  $\psi : \mathbf{C} \times \mathfrak{Z}^d \times \mathfrak{Z}^p \times \mathfrak{Z}^h \rightarrow \Re$ , que é função das variáveis internas e observáveis:

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \varphi^d, \varphi^p, \varphi^h) \quad (2.158)$$

com  $\boldsymbol{\varepsilon}^e \in \mathbf{C}$  definido como o tensor de deformações elásticas admissíveis.

Substituindo a equação (2.158) na equação (2.156) e introduzindo as forças termodinâmicas associadas, tem-se as seguintes equações constitutivas:

$$\sigma = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}, \quad \mathbf{V}^d = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \varphi^d}, \quad \mathbf{V}^p = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \varphi^p}, \quad \mathbf{V}^h = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varphi^h} \quad (2.159)$$

com

$$\mathbf{V}^d = \mathbf{V}^d(\mathbf{Y}^D, \gamma) \quad \mathbf{V}^p = \mathbf{V}^p(\tilde{\sigma}, R) \quad \mathbf{V}^h = \mathbf{V}^h(\mathbf{Y}^H, \phi) \quad (2.160)$$

onde  $\tilde{\sigma}$  é a tensão efetiva do material,  $\mathbf{Y}^D, \mathbf{Y}^H$  são as forças termodinâmicas referentes ao dano e a reparação, respectivamente e  $R, \gamma, \phi$  são forças termodinâmicas associadas à evolução dos fenômenos.

O potencial de dissipação mecânica  $\Xi$  é uma função positivo definida descrita por:

$$\Xi = \mathbf{V}^d : \dot{\boldsymbol{\phi}}^d + \mathbf{V}^p : \dot{\boldsymbol{\phi}}^p - \mathbf{V}^h : \dot{\boldsymbol{\phi}}^h \geq 0 \quad (2.161)$$

onde  $(:)$  representa o produto escalar entre tensores e o sinal de menos da parcela de  $\mathbf{V}^h$  é devido à natureza não dissipativa do processo de reparação.

A Energia Livre de Helmholtz é separada como segue:

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \varphi^d, \varphi^p, \varphi^h) = \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \mathbf{D}, \mathbf{H}) + \Pi(\delta, p, \mu) \quad (2.162)$$

onde  $\Phi : \mathbb{C} \times \mathfrak{S}^d \times \mathfrak{S}^h \times \mathfrak{S}^p \rightarrow \mathfrak{R}$  é a função da deformação elástica, dependente dos tensores de dano e de reparação;  $\Pi : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  é uma função escalar que expressa a evolução das variáveis inelásticas.

O funcional  $\Phi$  depende do valor atual das variáveis internas e é dado por:

$$\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \mathbf{D}, \mathbf{H}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \mathbf{E}(\mathbf{D}, \mathbf{H}) : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (2.163)$$

com  $\mathbf{E}$  representando o tensor de rigidez de quarta ordem função das variáveis de dano-reparação.

A natureza irreversível dos processos de reparação e de dano leva a uma função de evolução que aumenta monotonicamente. Sem perda de generalidade, pode-se expressar  $\Pi(\delta, p, \mu)$  na forma desacoplada:

$$\Pi(\delta, p, \mu) = \Pi^d(\delta) + \Pi^p(p) + \Pi^h(\mu) \quad (2.164)$$

em que:

$$\Pi^d(\delta) = - \int_{\delta_0}^{\delta_1} \frac{\partial \psi}{\partial \delta} \cdot d\delta = \left[ c_1^d \delta - c_1^d c_2^d \exp\left(\frac{\delta}{c_2^d}\right) \right]_{\delta_0}^{\delta_1} \quad \delta \in \mathfrak{S}^d, (c_1^d, c_2^d) \in \mathfrak{R} \quad (2.165)$$

$$\Pi^p(p) = - \int_{p_0}^{p_1} \frac{\partial \psi}{\partial p} \cdot dp = c_1^p \frac{1}{2} p^2 \Big|_{p_0}^{p_1} \quad p \in \mathfrak{S}^p, c_1^p \in \mathfrak{R}^+ \quad (2.166)$$

Na falta de resultados experimentais, o potencial de reparação foi assumido similar ao potencial de dano mas, no espaço termodinâmico correspondente (processo inverso ao dano). Assim:

$$\Pi^h(\mu) = - \int_{\mu_0}^{\mu_1} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \cdot d\mu = \left[ c_1^h \left( c_2^h \exp\left(\frac{\mu}{c_2^h}\right) - \mu \right) \right]_{\mu_0}^{\mu_1} \quad \mu \in \mathfrak{I}^h, c_1^h, c_2^h \in \mathfrak{R} \quad (2.167)$$

onde as constantes  $(c_1^d, c_2^d, c_1^p, c_1^h, c_2^h)$  são definidas em termos de dados avaliados experimentalmente por Barbero, Greco e Lonetti (2005).

A equação (2.167) é motivada por condições intrínsecas do fenômeno, comprovadas experimentalmente, que mostram que o processo de auto-reparação é iniciado basicamente pela evolução do dano. Desenvolvimentos futuros são necessários para validar completamente a equação (2.167).

As leis complementares associadas ao processo de dissipação podem ser expressas por potenciais homogêneos e convexos em termos de forças termodinâmicas associadas (HANSEN e SCHREYER<sup>12</sup>, 1994, citado por BARBERO, GRECO e LONETTI, 2005).

$$\Gamma^*(\mathbf{V}^d, \mathbf{V}^p, \mathbf{V}^h) = \Gamma^{*d}(\mathbf{V}^d) + \Gamma^{*p}(\mathbf{V}^p) + \Gamma^{*h}(\mathbf{V}^h) \quad (2.168)$$

O princípio da máxima dissipação define uma solução termodinâmica de equilíbrio que corresponde a um problema de otimização restrito.

O Método dos Multiplicadores de Lagrange pode ser utilizado para resolver o problema, onde o funcional:

$$\bar{\Pi} = -(\Xi) + \dot{\lambda}^p \Gamma_p^*(\mathbf{V}^p) + \dot{\lambda}^d \Gamma_d^*(\mathbf{V}^d) + \dot{\lambda}^h \Gamma_h^*(\mathbf{V}^h) \quad (2.169)$$

depende de  $(\dot{\lambda}^p, \dot{\lambda}^d, \dot{\lambda}^h)$ , que são os multiplicadores de Lagrange relacionados a plasticidade, dano e reparação, respectivamente.

Para encontrar os extremos de  $\bar{\Pi}$ , as condições seguintes devem ser satisfeitas:

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \mathbf{V}^d} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \mathbf{V}^p} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \mathbf{V}^h} = 0 \quad (2.170)$$

que correspondem às leis de evolução da taxa de deformação plástica, do dano e da reparação. As variáveis internas crescem na direção normal à superfície potencial correspondente:

---

<sup>12</sup> HANSEN, N.; SCHREYER, H. L. A thermodynamic consistent framework for theories of elastoplasticity coupled with damage. **International Journal of Solids Structures**. v.31, p.359-389, 1994.

$$\dot{\phi}^P = \dot{\lambda}^P \frac{\partial \Gamma_P^*}{\partial \mathbf{V}^P}, \quad \dot{\phi}^D = \dot{\lambda}^D \frac{\partial \Gamma_D^*}{\partial \mathbf{V}^D}, \quad \dot{\phi}^H = \dot{\lambda}^H \frac{\partial \Gamma_H^*}{\partial \mathbf{V}^H} \quad (2.171)$$

Segundo Barbero, Greco e Lonetti (2005) quando o dano distribuído controla o comportamento mecânico, muitos materiais, incluindo compósitos de matriz polimérica, apresentam um comportamento macroscópico quase frágil.

Durante o carregamento a energia total do sistema é dissipada principalmente na formação de uma nova superfície, enquanto que uma fração menor é usada para nuclear as microfissuras existentes.

O comportamento de reparação é gerado por agentes distribuídos, que podem ser assumidos uniformemente distribuídos no corpo.

Os fenômenos de dano e de reparação são descritos na mesoescala, por variáveis de estado internas, que representam a formação de microfissuras e a reparação, respectivamente.

Na falta de observações experimentais que justifiquem um comportamento mais complexo, a evolução do dano e da reparação é assumida isotrópica e nos compósitos materiais, tanto as microfissuras quanto os vazios têm direções de crescimento preferencial coincidente com as direções do material. Portanto as direções principais dos tensores do dano e da reparação são assumidas coincidentes com as coordenadas do material. Dessa forma tem-se:

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^3 d_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad \mathbf{H} = \sum_{i=1}^3 h_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (2.172)$$

onde  $\otimes$  representa o produto diádico entre vetores,  $d_i, h_i$  são os autovalores e  $\mathbf{n}_i$  são os autovetores dos tensores  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{H}$ , respectivamente.

De acordo com o Princípio da Energia Elástica Equivalente, o tensor de rigidez é definido como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{D}, \mathbf{H}) = \mathbf{M} : \tilde{\mathbf{E}} : \mathbf{M}^T \quad (2.173)$$

onde  $\mathbf{M}$  é o tensor de dano efetivo, que é um tensor diagonal de quarta ordem definido em termos de  $d_i$  e de  $h_i$ , conforme indicado em Barbero, Greco e Lonetti, (2005).

a) Equações constitutivas

As variáveis internas utilizadas nas equações constitutivas termodinâmicas estão indicadas na Tabela 2.5.

O potencial da Energia Livre de Helmholtz é expresso por

$$\psi = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \mathbf{E} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \left[ c_1^d \delta - c_1^d c_2^d \exp\left(\frac{\delta}{c_2^d}\right) \right] + \frac{1}{2} c_1^p p^2 + \left[ c_1^h c_2^h \exp\left(\frac{\mu}{c_2^h}\right) - c_1^h \mu \right] \quad (2.174)$$

As forças termodinâmicas definidas pela equação (2.159) podem ser escritas como:

$$\boldsymbol{\sigma} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathbf{E} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (2.175)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.176)$$

$$\mathbf{Y}^D = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{D}} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{D}} \right) : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (2.177)$$

$$\mathbf{Y}^H = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{H}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{H}} \right) : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (2.178)$$

$$\mathbf{R} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial p} = -c_1^p p \quad (2.179)$$

$$\gamma = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \delta} = c_1^d \left[ \exp\left(\frac{\delta}{c_2^d}\right) - 1 \right] \quad (2.180)$$

$$\phi = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mu} = c_1^h \left[ \exp\left(\frac{\mu}{c_2^h}\right) - 1 \right] \quad (2.181)$$

O conceito de forças termodinâmicas de reparação pode ser ilustrado por um ciclo de tensões, considerando o balanço da dissipação de energia. Uma curva tensão-deformação genérica é mostrada na Figura 2.27, para a qual assume-se que o dano e a reparação aumentam com o aumento da tensão.

Tabela 2.5 - Variáveis observáveis, cinemáticas e conjugadas

QUANTIDADES	VARIÁVEIS OBSERVÁVEIS	VARIÁVEIS DE ESTADO INTERNAS	
		Variáveis cinemáticas	Forças termodinâmicas
Deformação	$\varepsilon$		
Temperatura	T		
Dano		<b>D</b>	<b><math>Y^D</math></b>
Evolução do dano		$\delta$	$\gamma$
Deformação plástica		$\varepsilon^p$	<b><math>\sigma</math></b>
Encruamento		$\rho$	<b>R</b>
Reparação		<b>H</b>	<b><math>Y^H</math></b>
Evolução da reparação		$\mu$	$\phi$

Fonte: BARBERO, GRECO e LONETTI, 2005

Na Figura 2.27, a energia total dissipada durante um ciclo é representada pela área OABCE. A energia recuperada devida aos efeitos da reparação é representada pela área CDE. As energias dissipadas devidas ao dano e à plastificação são representadas, respectivamente pelas áreas BDE e OAFE.

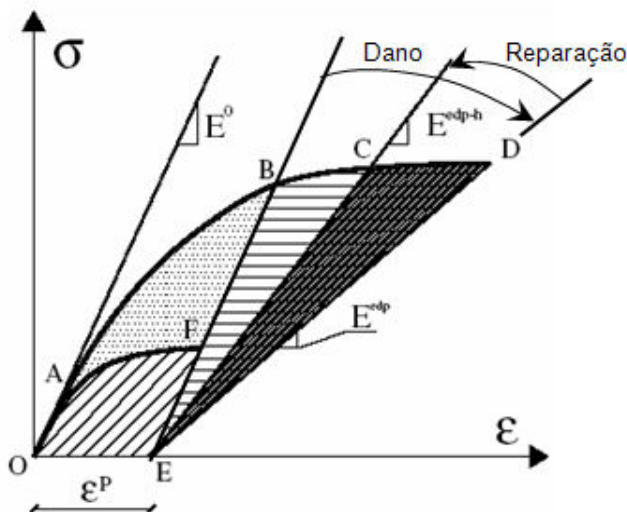


Figura 2.27 – Curva tensão-deformação: dano elasto-plástico e dano-reparação elasto-plástico.

Fonte: BARBERO, GRECO e LONETTI, 2005



No caso dos ossos, o fenômeno de reparação é gerado por produção de energia interna (obtida pelo gasto de energia química armazenada nos agentes de reparação) ou por energia fornecida externamente em um processo de sintetização ou reparo biológico do osso.

O processo de reparação aumenta a rigidez do material e gera produção de energia interna, que é oposta à dissipação provocada pelo dano.

Com base nas equações (2.175) a (2.181), sob a hipótese do desacoplamento entre os processos e, de acordo com a desigualdade de Clausius-Duhem, a função de dissipação termodinâmica total é necessariamente positiva e pode ser definida por:

$$\Xi = \Xi^P + \Xi^D + \Xi^H \quad (2.182)$$

onde  $\Xi^D$  representa a área BCDE e  $\Xi^H$  representa a área DCE da Figura 2.27.

As funções de dissipação são dadas por:

$$\Xi^P = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P + \mathbf{R} \cdot \dot{p} \geq 0 \quad (2.183)$$

$$\Xi^D = \mathbf{Y}^d : \dot{\mathbf{D}} + \gamma \cdot \dot{\delta} \geq 0 \quad (2.184)$$

$$\Xi^H = -\mathbf{Y}^h : \dot{\mathbf{H}} - \phi \cdot \dot{\mu} \leq 0 \quad (2.185)$$

onde  $\Xi^P$ ,  $\Xi^D$  e  $\Xi^H$  são as funções de dissipação relacionadas aos processos de plasticidade, dano e reparação, respectivamente.

De acordo com o método do estado local, as leis de evolução podem ser derivadas dos potenciais de dissipação. Os potenciais de dano e de plasticidade propostos por Barbero e DeVivo (2001), Barbero e Lonetti (2001, 2002) e por Lonetti et al. (2003) têm mostrado boa correspondência entre os resultados numéricos e experimentais.

Esses potenciais de evolução são:

$$f^d = (\mathbf{Y}^D : \mathbf{J}^D : \mathbf{Y}^D)^{1/2} - \gamma(\delta) - \gamma_0 \quad (2.186)$$

$$f^p(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = f_1 \tilde{\sigma}_1 + f_2 \tilde{\sigma}_2 + f_{11} \tilde{\sigma}_1^2 + f_{22} \tilde{\sigma}_2^2 + 2f_{12} \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 + f_{44} \tilde{\sigma}_4^2 + f_{55} \tilde{\sigma}_5^2 + f_{66} \tilde{\sigma}_6^2 - R(p) - R_0 \quad (2.187)$$

onde  $\gamma_0$  e  $R_0$  são parcelas do dano e da plasticidade,  $\mathbf{J}^D$  é o tensor de quarta

ordem característico do dano e  $f_i$  são parâmetros dos materiais.

Para a reparação, é proposto um potencial de evolução similar ao do dano:

$$f^H = (\mathbf{Y}^H : \mathbf{J}^H : \mathbf{Y}^H)^{1/2} - \phi(\mu) - \phi_0 \quad (2.188)$$

onde  $\phi_0$  é a parcela da reparação e  $\mathbf{J}^H$  é o tensor de quarta ordem da reparação.

Da equação (2.171), assume-se que os vetores de evolução desenvolvem-se ao longo da direção normal da superfície potencial correspondente.

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^d &= \begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{\mathbf{D}} \end{bmatrix} = \dot{\lambda}^d \nabla_{,V^d} f^d \\ &= \dot{\lambda}^d \left[ \frac{-1}{\sqrt{\mathbf{Y}^D : (\mathbf{J}^D : \mathbf{Y}^D)}} \right] = \dot{\lambda}^d \left[ \frac{1}{\Delta^d} \begin{bmatrix} J_{11}^D Y_1^D & -1 & 0 \\ 0 & J_{22}^D Y_2^D & 0 \\ 0 & 0 & J_{33}^D Y_3^D \end{bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (2.189)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^p &= \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \tilde{\dot{\varepsilon}}^p \end{bmatrix} = \dot{\lambda}^d \nabla_{,V^p} g^p \\ &= \dot{\lambda}^p \begin{bmatrix} -1 & 2f_{66}\tilde{\sigma}_6 & 2f_{55}\tilde{\sigma}_5 \\ 2f_{11}\tilde{\sigma}_1 + f_1 + 2f_{12}\tilde{\sigma}_2 & 2f_{22}\tilde{\sigma}_2 + f_2 + 2f_{12}\tilde{\sigma}_1 & 2f_{44}\tilde{\sigma}_4 \\ \text{simétrico} & & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.190)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^H &= \begin{bmatrix} \dot{\mu} \\ \dot{\mathbf{H}} \end{bmatrix} = \dot{\lambda}^H \nabla_{,V^H} f^H \\ &= \dot{\lambda}^H \left[ \frac{-1}{\sqrt{\mathbf{Y}^H : (\mathbf{J}^H : \mathbf{Y}^H)}} \right] = \dot{\lambda}^H \left[ \frac{1}{\Delta^H} \begin{bmatrix} J_{11}^H Y_1^H & -1 & 0 \\ 0 & J_{22}^H Y_2^H & 0 \\ 0 & 0 & J_{33}^H Y_3^H \end{bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (2.191)$$

com o produto  $(\cdot)$  representando o produto de dois tensores de forma que  $(\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{Q}_{ik} \mathbf{R}_{kj})$ . Considerando-se:

$$\Delta^{D,H} = \sqrt{J_{11}^{D,H} (Y_1^{D,H})^2 + J_{22}^{D,H} (Y_2^{D,H})^2 + J_{33}^{D,H} (Y_3^{D,H})^2} \quad (2.192)$$

b) Domínios inelásticos e domínio da reparação

Uma proposição de critério de dano anisotrópico, que permite descrever o domínio do dano para materiais poliméricos compostos, é apresentada em termos de parâmetros tensoriais:

$$g^d = \left( \mathbf{Y}^D : \mathbf{J}^D : \mathbf{Y}^D \right)^{1/2} + \left( \left| \mathbf{H}^D \cdot \mathbf{Y}^D \right| \right)^{1/2} - \gamma(\delta) - \gamma_0 \quad (2.193)$$

onde  $g^d : \mathfrak{S}^d \rightarrow \mathfrak{R}^+$ .

Substituindo as equações (2.175) e (2.177) na equação (2.193), o domínio do dano no espaço das tensões tem a mesma forma da superfície de Tsai-Wu, que é uma superfície de falha amplamente aceita (BARBERO<sup>13</sup>, 1999, citado por BARBERO, GRECO e LONETTI, 2005).

Analogamente ao processo de dano, um domínio de reparação é introduzido, com uma expressão similar à do dano, mas escrita em um espaço termodinâmico diferente.

$$g^H = \left( \mathbf{Y}^H : \mathbf{J}^H : \mathbf{Y}^H \right)^{1/2} + \left( \left| \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{Y}^H \right| \right)^{1/2} - \phi(\mu) - \phi_0 \quad (2.194)$$

onde  $\mathbf{J}^H$  e  $\mathbf{H}^H$  são variáveis tensoriais que definem a forma da superfície de reparação e  $\phi(\mu)$  é a função de evolução da reparação.

A superfície de reparação é definida por evidências experimentais. Particularmente, o fenômeno de reparação começa quando uma distribuição significativa de microfissuras é observada.

Subseqüentemente o material é reconstituído com uma eficiência finita que depende de parâmetros microestruturais do material.

Desta forma,  $\phi_0$  controla o início da reparação e a superfície de reparação define o espaço limite relacionado a possível produção de reparação.

Além disso, a analogia com  $g^d$  é motivada por observações experimentais que mostram como o fenômeno da reparação depende da distribuição de microfissuras e de vazios.

Então, pode-se considerar que o modelo proposto prediz a evolução da

---

<sup>13</sup> BARBERO, E. J. **Introduction to composite materials design**. Taylor and Francis, N.Y., 1999.

reparação introduzindo uma superfície de reparação, que é obviamente similar a superfície de dano.

O processo de reparação começa no ponto em que um dano considerável é observado. No modelo, isso ocorre quando as forças termodinâmicas de reparação atingem a superfície de reparação correspondente.

### c) Equações de evolução

As leis de evolução cinemáticas são derivadas do princípio da máxima dissipação em uma abordagem termodinâmica consistente e generalizada. A solução é obtida pela resolução de um sistema de equações não-lineares usando um processo iterativo-incremental.

Para um estado termodinâmico genérico, as condições de otimalidade de Kuhn-Tucker devem ser satisfeitas.

$$g^D(\mathbf{V}^D) = dg^D(\mathbf{V}^D) = 0, \quad g^P(\mathbf{V}^P) = dg^P(\mathbf{V}^P) = 0, \quad g^H(\mathbf{V}^H) = dg^H(\mathbf{V}^H) = 0 \quad (2.195)$$

Substituindo as equações (2.175) a (2.181) e (2.189) a (2.192) na equação (2.195) obtém-se um sistema de equações lineares com as incógnitas  $\dot{\lambda}^d, \dot{\lambda}^p$  e  $\dot{\lambda}^h$ :

$$[\mathbf{A}] [\bar{\lambda}] + [\mathbf{b}] = 0 \quad (2.196)$$

considerando:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \bar{\lambda} = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}^d \\ \dot{\lambda}^p \\ \dot{\lambda}^h \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{221} \\ b_{33} \end{bmatrix} \quad (2.197)$$

com:

$$a_{11} = \left( \frac{\partial g^d}{\partial \mathbf{Y}^D} \frac{\partial \mathbf{Y}^D}{\partial \mathbf{D}} \nabla_{,Y^D} f^d + \frac{\partial g^d}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \delta} \nabla_{,\gamma} f^d \right) \quad (2.198)$$

$$a_{12} = \left( \frac{\partial g^d}{\partial \mathbf{Y}^D} \frac{\partial \mathbf{Y}^D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \mathbf{M}^{-1} \nabla_{,\tilde{\sigma}} g^p \right) \quad (2.199)$$

$$a_{13} = \left( \frac{\partial \mathbf{g}^d}{\partial \mathbf{Y}^D} \frac{\partial \mathbf{Y}^D}{\partial \mathbf{H}} \nabla_{,Y^H} f^h \right) \quad (2.200)$$

$$b_{11} = \left( \frac{\partial \mathbf{g}^d}{\partial \mathbf{Y}^D} \frac{\partial \mathbf{Y}^D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} d\boldsymbol{\varepsilon} \right) \quad (2.201)$$

$$a_{21} = \frac{\partial \mathbf{g}^p}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}} [\mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\sigma}] \nabla_{,Y^D} f^d \quad (2.202)$$

$$a_{22} = \left( \frac{\partial \mathbf{g}^p}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \mathbf{M}^{-1} \nabla_{,\tilde{\sigma}} \mathbf{g}^p + \frac{\partial \mathbf{g}^p}{\partial \mathbf{R}} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial p} \nabla_{,R} \mathbf{g}^p \right) \quad (2.203)$$

$$a_{23} = \frac{\partial \mathbf{g}^p}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{H}} [\mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\sigma}] \nabla_{,Y^H} f^h \quad (2.204)$$

$$b_{22} = \frac{\partial \mathbf{g}^p}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.205)$$

$$a_{31} = \left( \frac{\partial \mathbf{g}^h}{\partial \mathbf{Y}^H} \frac{\partial \mathbf{Y}^H}{\partial \mathbf{D}} \nabla_{,Y^D} f^d \right) \quad (2.206)$$

$$a_{32} = \left( \frac{\partial \mathbf{g}^h}{\partial \mathbf{Y}^H} \frac{\partial \mathbf{Y}^H}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \mathbf{M}^{-1} \nabla_{,\tilde{\sigma}} \mathbf{g}^p \right) \quad (2.207)$$

$$a_{33} = \left( \frac{\partial \mathbf{g}^h}{\partial \mathbf{Y}^H} \frac{\partial \mathbf{Y}^H}{\partial \mathbf{H}} \nabla_{,Y^H} f^h + \frac{\partial \mathbf{g}^h}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \nabla_{,\phi} f^h \right) \quad (2.208)$$

$$b_{33} = \left( \frac{\partial \mathbf{g}^h}{\partial \mathbf{Y}^H} \frac{\partial \mathbf{Y}^H}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} d\boldsymbol{\varepsilon} \right) \quad (2.209)$$

Ainda, substituindo as equações (2.198) a (2.209) na equação (2.197) é possível derivar as relações incrementais

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{D} \\ d\boldsymbol{\varepsilon}^p \\ d\mathbf{H} \end{bmatrix} = \text{diag} \begin{bmatrix} \nabla_{,Y^D} f^d \\ \nabla_{,\tilde{\sigma}} g^p \\ \nabla_{,Y^H} f^h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda^d \\ d\lambda^p \\ d\lambda^h \end{bmatrix} = \text{diag} \begin{bmatrix} \nabla_{,Y^D} f^d \\ \nabla_{,\tilde{\sigma}} g^p \\ \nabla_{,Y^H} f^h \end{bmatrix} [\mathbf{A}]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial g^d}{\partial Y^D} \frac{\partial Y^D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \\ \frac{\partial g^p}{\partial \tilde{\sigma}} \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \\ \frac{\partial g^h}{\partial Y^H} \frac{\partial Y^H}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \end{bmatrix} d\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbb{N}^d \\ \mathbb{N}^p \\ \mathbb{N}^h \end{bmatrix} [d\boldsymbol{\varepsilon}] \quad (2.210)$$

onde  $\mathbb{N}^j$  com  $j = d, p, h$  representa as contribuições do tensor de rigidez relacionadas aos mecanismos de dano, plasticidade e reparação.

Usando as equações (2.173), (2.175) e (2.176), as tensões incrementais na configuração efetiva podem ser expressas por:

$$d\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = d\mathbf{M}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{M}^{-1} : d\boldsymbol{\sigma} = \left[ \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{D}} : d\mathbf{D} + \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}} : d\mathbf{H} \right]^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{M}^{-1} : d\boldsymbol{\sigma} \quad (2.211)$$

onde:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbf{E}} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \quad d\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{D}} : d\mathbf{D} + \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}} : d\mathbf{H} \quad (2.212)$$

Substituindo as equações (2.212) e (2.173) na equação (2.211) a relação tensão-deformação incremental na configuração atual é escrita como:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_T^{epdh} : d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.213)$$

com:

$$\mathbf{E}_T^{epdh} = \mathbf{E}_T^{ep} + \mathbf{E}_T^{dh} \quad (2.214)$$

$$\mathbf{E}_T^{ep} = \mathbf{M} : \mathbf{E} : \mathbf{M} (\mathbf{I} - \mathbb{N}^p)_{\text{elasto-plasticidade}} \quad (2.215)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T^{dh} = & \left( \mathbf{M} : \mathbf{E} : \left( \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{D}} : \mathbb{N}^d + \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}} : \mathbb{N}^h \right) \right. \\ & \left. - \mathbf{M} : \left( \frac{d\mathbf{M}^{-1}}{d\mathbf{D}} : \mathbb{N}^d : \mathbf{D} + \frac{d\mathbf{M}^{-1}}{d\mathbf{H}} : \mathbb{N}^h : \mathbf{H} \right) \right)_{\text{dano-reparação}} \end{aligned} \quad (2.216)$$

onde  $\mathbf{E}_T^{ep}$  e  $\mathbf{E}_T^{dh}$  representam as contribuições elasto-plástica e de dano-reparação.

Nesta proposta a Mecânica do Dano Contínuo foi estendida pela primeira vez, para incorporar o processo de reparação, no que vem a ser a Mecânica de Dano-Reparação Contínuos.

As expressões foram apresentadas para vários domínios, potenciais e equações de evolução, baseados na percepção adquirida das observações experimentais.

#### 2.4.8 Modelo proposto por Souza

O modelo proposto por Souza (2009) é fundamentado na Mecânica do Dano Contínuo, simulando a porosidade do osso pelo dano, incluindo sua magnitude e orientação, de maneira semelhante ao proposto por Doblaré e Garcia (2002).

Como o modelo proposto por Doblaré e Garcia (2002) já foi descrito no item 2.4.3 serão apresentados na seqüência os resultados mais importantes, e que diferenciam o trabalho desenvolvido por Souza (2009).

O tensor dano  $\mathbf{D}$  é dado por:

$$\mathbf{D} = \mathbf{I} - \left( \frac{\rho}{\hat{\rho}} \right)^{\beta/2} \quad \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{I} - \left( \frac{\hat{\rho}e}{\hat{\rho}} \right)^{\beta/2} \quad \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{I} - e^{\beta/2} \quad \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{I} - \mathbf{H}^2 \quad (2.217)$$

onde  $e$  é a fração de volume ósseo,  $\hat{\rho}$  é a densidade de uma amostra imaginária de tecido ósseo sem porosidade,  $\beta$  é um parâmetro experimental que relaciona o módulo de elasticidade à densidade aparente e  $\hat{\mathbf{H}}$  o tensor *Fabric*, considerado normalizado tal que  $\det(\hat{\mathbf{H}}) = 1$ .

A lei de evolução para o tensor de remodelação  $\mathbf{H}$  é dada por:

$$\textbf{Reabsorção: } \dot{\mathbf{H}} = \frac{3\beta}{4\rho} \frac{\dot{\rho}_H}{\text{tr}(\mathbf{H}^{-2} \mathbf{J} \hat{\omega}_d \mathbf{H})} \mathbf{J} \hat{\omega}_d, \text{ se } g^r \geq 0 \text{ e } g^f < 0 \quad (2.218)$$

$$\textbf{“Zona morta”}: \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0}, \text{ se } g^r < 0 \text{ e } g^f < 0 \quad (2.219)$$

$$\textbf{Formação: } \dot{\mathbf{H}} = \frac{3\beta}{4\rho} \frac{\dot{\rho}_H}{\text{tr}(\mathbf{H}^{-2} \mathbf{J} \hat{\omega}_d \mathbf{H})} \mathbf{J} \hat{\omega}_d, \text{ se } g^r < 0 \text{ e } g^f \geq 0 \quad (2.220)$$

onde  $\mathbf{J}$  é o tensor que quantifica a influência relativa às partes esférica e desviadora do tensor Força Termodinâmica  $\mathbf{Y}$ , o tensor  $\hat{\omega}_d$  é dado pela equação (2.78) e foi utilizado para na nomenclatura  $\dot{\rho}_H$  para a taxa de densidade aparente, ao invés de  $\dot{\rho}$ , para não haver confusão com a taxa da densidade.

O critério de dano envolvendo o tensor  $\mathbf{J}(\mathbf{Y})$  e a fração de volume ósseo  $e$  é descrito pelo sistema de inequações:

$$g^r = \frac{3^{1/2}}{4\hat{\rho}(1-\omega)e^{(4+3\beta)/4}} \left[ (\mathbf{J}_{ref} : \mathbf{J}_{ref})^{1/2} - (\mathbf{J} : \mathbf{J})^{1/2} \right] < 0$$

$$g^f = \frac{3^{1/2}}{4\hat{\rho}(1-\omega)e^{(4+3\beta)/4}} \left[ (\mathbf{J} : \mathbf{J})^{1/2} - (\mathbf{J}_{ref} : \mathbf{J}_{ref})^{1/2} \right] < 0$$
(2.221)

considerando  $\omega_d \in [0,1]$  sendo que  $\omega_d = 0$  corresponde a isotropia e  $\omega_d = 1$  corresponde a máxima anisotropia e  $\mathbf{J}_{ref}$  como o tensor de referência determinado a partir dos valores de  $E$  e  $\rho$  no equilíbrio homeostático, dado por:

$$\mathbf{J}_{ref} = \frac{I}{3}(1-2\omega)tr(\mathbf{Y}_{ref})\mathbf{I} + \omega\mathbf{Y}_{ref}$$
(2.222)

onde o tensor Força Termodinâmica de referência  $\mathbf{Y}_{ref}$  é avaliado em função do vetor de deformações de referência  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ref}$ , podendo este ser obtido a partir de uma barra de tecido ósseo no Estado Plano de Deformações, carregada axialmente por tração.

A taxa da densidade aparente  $\dot{\rho}_H$  ligada diretamente à evolução do tensor Remodelação é avaliada seguindo a idéia proposta por McNamara (2004), assim:

Para  $d < d_{crit}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_H &= -C_7 g^r \text{ para } g^r \geq 0; g^f < 0 \\ \dot{\rho}_H &= 0 \text{ para } g^r < 0; g^f < 0 \\ \dot{\rho}_H &= C_8 g^f \text{ para } g^r < 0; g^f \geq 0 \end{aligned}$$
(2.223)

Para  $d > d_{crit}$ :

$$\dot{\rho}_H = -C_9 \left( \int_0^t \dot{d} dt - d_{crit} \right)$$
(2.224)

para as quais considera-se que as constantes  $C_7$  e  $C_8$  governam a taxa do tensor Remodelação em resposta ao tensor Força Termodinâmica, e  $C_9$  é a constante que governa a taxa de remodelação referente ao escalar dano  $d$ . O parâmetro  $d_{crit}$  é a quantidade crítica de dano no tecido ósseo utilizado para estimar a taxa de acúmulo de dano na remodelação.

Finalmente, a lei de evolução para o tensor  $\dot{\mathbf{H}}$  é sintetizada pelas seguintes condições:



Para  $d < d_{crit}$ :

$$\text{Reabsorção: } \dot{H} = -\frac{3\beta}{4} \frac{\mathbf{J}\hat{\omega}_d}{\text{tr}(\mathbf{H}^{-2}\mathbf{J}\hat{\omega}_d\mathbf{H})} \frac{C_7 g^r}{\rho} \text{ para } g^r \geq 0; g^f < 0$$

$$\text{"Zona morta": } \dot{H} = 0 \text{ para } g^r < 0; g^f < 0$$

$$\text{Formação: } \dot{H} = \frac{3\beta}{4} \frac{\mathbf{J}\hat{\omega}_d}{\text{tr}(\mathbf{H}^{-2}\mathbf{J}\hat{\omega}_d\mathbf{H})} \frac{C_8 g^f}{\rho} \text{ para } g^r < 0; g^f \geq 0$$
(2.225)

Para  $d > d_{crit}$ :

$$\text{Reabsorção de tecido danificado: } \dot{H} = -\frac{3\beta}{4} \frac{\mathbf{J}\hat{\omega}_d}{\text{tr}(\mathbf{H}^{-2}\mathbf{J}\hat{\omega}_d\mathbf{H})} \frac{C_9 \left( \int_0^t \frac{\partial d}{\partial t} dt - d_{crit} \right)}{\rho} \quad (2.226)$$

Assume-se que, mesmo que a remodelação esteja em equilíbrio, existe certa quantidade de dano no interior do tecido ósseo. A remodelação em resposta ao acúmulo de dano  $d$  ocorre somente quando essa quantidade escalar varia do nível homeostático, ou seja,  $\Delta d > 0$  (conforme observa-se na equação (2.45)).

Na Figura 2.28 é mostrado um esquema da adaptação óssea proposta de acordo com a evolução da taxa da densidade aparente  $\dot{\rho}$  em função do vetor de deformações  $\epsilon_{ref}$ .

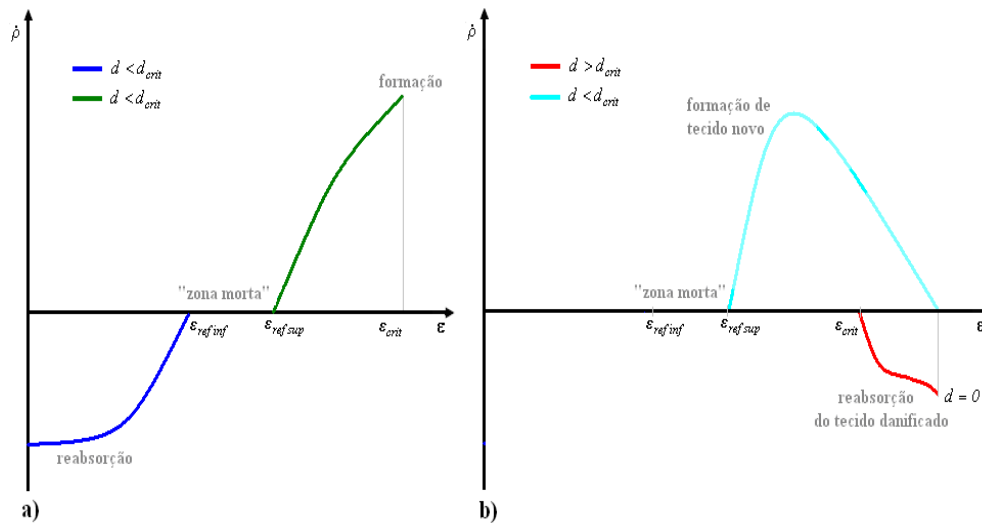


Figura 2.28 – Esquema da adaptação óssea com a evolução da taxa da densidade aparente para duas situações distintas: (a)  $d < d_{crit}$  e (b)  $d > d_{crit}$  (reparação óssea).

Fonte: SOUZA, 2009

Um esboço da relação tensão-deformação unidimensional para o osso, durante as fases de reabsorção (perda de rigidez) e formação óssea (ganho de rigidez), quando o dano acumulado localmente no tecido está abaixo do valor crítico, é mostrado na Figura 2.29.

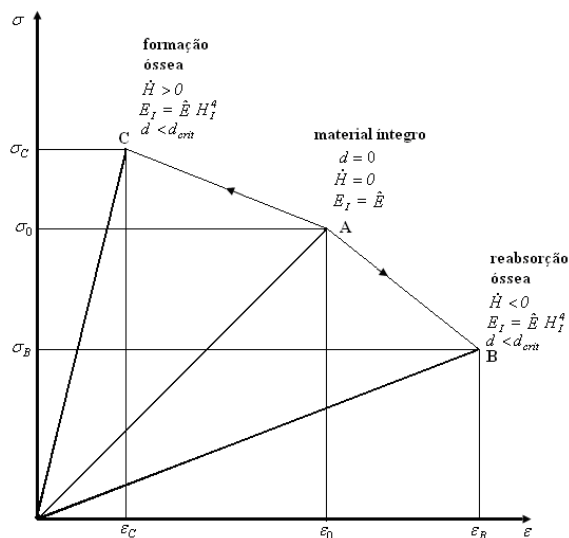


Figura 2.29 – Esboço da relação tensão-deformação para o osso durante a (reabsorção óssea) e a (formação óssea). Em ambas as fases  $d < d_{crit}$ .

Fonte: SOUZA, 2009

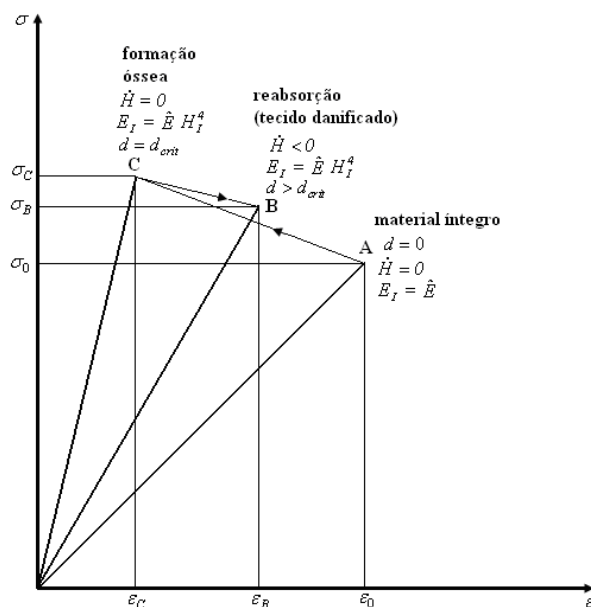


Figura 2.30 – Esquema contendo a relação tensão-deformação quando  $d > d_{crit}$ .

Fonte: SOUZA, 2009

Na Figura 2.30 é apresentado um esquema da relação tensão-deformação unidimensional quando o nível de dano acumulado está acima do valor crítico, havendo diminuição de rigidez (taxa negativa da densidade) devido à reabsorção de tecido ósseo danificado.

#### 2.4.9 Comparação entre os modelos de remodelamento descritos

Uma comparação entre algumas das principais características que se observa nos modelos de remodelação descritos nos itens 2.4.1 a 2.4.8 é apresentada na Tabela 2.6.

O intuito dessa comparação é mostrar os princípios e as variáveis, bem como as leis de evolução, que os pesquisadores utilizaram para formular as teorias apresentadas, para que se possa, a partir disso propor uma nova teoria com vantagens que serão discutidas no item 3.

Tabela 2.6 – Comparação entre os modelos de remodelamento

MODELO	ENERGIA	LEIS DE EVOLUÇÃO
	VARIÁVEIS DE ESTADO	
ISOTRÓPICO DE STANFORD	Energia de deformação: $U = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$	$\dot{\rho} = \dot{r} S_v \rho_t$
	Deformação ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) Densidade aparente ( $\rho$ )	
ANISOTRÓPICO DE STANFORD	Energia potencial mecânica interna: $\varsigma(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}, \rho) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \Theta(\rho)$	$\dot{C} = \begin{cases} -\gamma^r \frac{\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}} f^r \geq 0, & \text{se } f^a < 0 \\ 0I, & \text{se } f^r < 0, f^a < 0 \\ \gamma^a \frac{\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}} f^r < 0, & \text{se } f^a \geq 0 \end{cases}$
	Deformação ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) Tensor de rigidez ( $\mathbf{C}$ ) Densidade aparente ( $\rho$ )	
		$\dot{\rho} = \begin{cases} -c_e \frac{f^r(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}, \rho)}{\rho^{2-\beta/2}} S_v(\rho), & \text{se } f^r \geq 0, f^a < 0 \\ 0, & \text{se } f^r < 0, f^a < 0 \\ c_e \frac{f^a(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}, \rho)}{\rho^{2-\beta/2}} S_v(\rho), & \text{se } f^r < 0, f^a \geq 0 \end{cases}$

GARCÍA, DOBLARÉ e CEGOÑINO	Energia Livre: $\psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$	$\begin{cases} \text{Reabsorção : } \dot{\mathbf{H}} = \frac{3\beta \, k\dot{r}S_v}{4 \, tr(\mathbf{H}^{-2} \mathbf{J}^{-3} \mathbf{H} \hat{\omega}_d)} \frac{\hat{\rho}}{\rho} \mathbf{J}^{-3} \hat{\omega} \\ \text{Formação : } \dot{\mathbf{H}} = \frac{3\beta \, k\dot{r}S_v}{4 \, tr(\mathbf{H}^{-2} \mathbf{J} \mathbf{H} \hat{\omega}_d)} \frac{\hat{\rho}}{\rho} \mathbf{J} \hat{\omega} \end{cases}$
	Deformação ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) Tensor de remodelamento ( $\mathbf{H}$ )	
DOBLARÉ e GARCÍA	Energia Livre Complementar: $\psi_c(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}) = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}) - \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}), \mathbf{H})$	$\begin{cases} \text{Reabsorção : } \dot{\mathbf{H}} = \frac{3\beta \, k\dot{r}S_v}{4 \, tr(\mathbf{H}^{-2} \mathbf{J}^{-3} \mathbf{H} \hat{\omega}_d)} \frac{\hat{\rho}}{\rho} \mathbf{J}^{-3} \hat{\omega} \\ \text{Formação : } \dot{\mathbf{H}} = \frac{3\beta \, k\dot{r}S_v}{4 \, tr(\mathbf{H}^{-2} \mathbf{J} \mathbf{H} \hat{\omega}_d)} \frac{\hat{\rho}}{\rho} \mathbf{J} \hat{\omega} \end{cases}$
	Tensão ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) Tensor de remodelamento ( $\mathbf{H}$ )	
RAMTANI e ZIDI	Energia Livre de Helmholtz: $\psi = (1-d)\bar{\psi}(e, \mathbf{E}_{ij})$	$\dot{e} = \frac{1}{(1-d)} \left\{ \bar{\Phi}(e, \mathbf{E}_{ij}, d) + (\xi_0 + e) \dot{d} \right\}$  $\dot{d} = \dot{\lambda} H(\mathbf{Y}_t^*, d_t, k_0)$
	Deformação ( $\mathbf{E}$ ) Variação na fração de volume ( $e$ ) Variável escalar de dano ( $d$ )	
MCNAMARA e PRENDERGAST	Densidade de energia de deformação: $U^j = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^j : \mathbf{E}^j : \boldsymbol{\varepsilon}^j}{2\rho^j}$	Deformação: $\frac{d\rho^j}{dt} = C_I S_{deformação}^j$
	Deformação ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) Variável escalar de dano ( $\omega$ ) Densidade aparente ( $\rho$ )	Dano: $\frac{d\rho^j}{dt} = C_{II} S_{dano}^j$  Dano e deformação: $\frac{d\rho^j}{dt} = C_I S_{deformação}^j + C_{II} S_{dano}^j$  Dano e deformação com priorização do dano: $\omega < \omega_{crit} \quad \frac{d\rho^j}{dt} = C_I S_{deformação}^j$ $\omega > \omega_{crit} \quad \frac{d\rho^j}{dt} = C_{II} S_{dano}^j$

BARBERO, GRECO e LONETTI	Energia Livre de Helmholtz:  $\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \varphi^d, \varphi^p, \varphi^h)$ $= \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \mathbf{D}, \mathbf{H}) + \Pi(\delta, p, \mu)$	$f^d = (\mathbf{Y}^D : \mathbf{J}^D : \mathbf{Y}^D)^{1/2} - \gamma(\delta) - \gamma_0$ $f^p(\tilde{\sigma}) = f_1 \tilde{\sigma}_1 + f_2 \tilde{\sigma}_2 + f_{11} \tilde{\sigma}_1^2 + f_{22} \tilde{\sigma}_2^2 + 2f_{12} \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 + f_{44} \tilde{\sigma}_4^2 + f_{55} \tilde{\sigma}_5^2 + f_{66} \tilde{\sigma}_6^2 - R(p) - R_0$ $f^H = (\mathbf{Y}^H : \mathbf{J}^H : \mathbf{Y}^H)^{1/2} - \phi(\mu) - \phi_0$
	Deformação ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ )  Variáveis de dano, plasticidade e reparação: - tensoriais ( $\mathbf{D}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \mathbf{H}$ ) - escalares ( $\delta, p, \mu$ )	
SOUZA	Energia Livre: $\psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$	<b>Para <math>d &lt; d_{crit}</math>:</b>  Reabsorção: $\dot{\mathbf{H}} = -\frac{3\beta}{4} \frac{\mathbf{J}\hat{\omega}_d}{tr(\mathbf{H}^{-2}\mathbf{J}\hat{\omega}_d\mathbf{H})} \frac{C_7 g^r}{\rho}$ para $g^r \geq 0; g^f < 0$  “Zona morta”: $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$ para $g^r < 0; g^f < 0$  Formação: $\dot{\mathbf{H}} = \frac{3\beta}{4} \frac{\mathbf{J}\hat{\omega}_d}{tr(\mathbf{H}^{-2}\mathbf{J}\hat{\omega}_d\mathbf{H})} \frac{C_8 g^f}{\rho}$ para $g^r < 0; g^f \geq 0$  <b>Para <math>d &gt; d_{crit}</math>:</b>  Reabsorção de tecido danificado: $\dot{\mathbf{H}} = -\frac{3\beta}{4} \frac{\mathbf{J}\hat{\omega}_d}{tr(\mathbf{H}^{-2}\mathbf{J}\hat{\omega}_d\mathbf{H})} \frac{C_9 \left( \int_0^t \frac{\partial d}{\partial t} dt - d_{cirt} \right)}{\rho}$
	Deformação ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) Tensor de remodelamento ( $\mathbf{H}$ ) Variável escalar de dano ( $d$ )	

É importante ressaltar que nos modelos anteriormente descritos que consideram o dano, este é representado por uma variável de dano virtual (baseada na Teoria do Dano), como uma medida da porosidade e da anisotropia da microestrutura óssea, sem referência aos danos internos reais.

### **3 PROPOSTA DE MODELO CONSTITUTIVO PARA A REMODELAÇÃO ÓSSEA UTILIZANDO VARIÁVEIS INTERNAS ESCALARES**

Um modelo de remodelação óssea deve ser capaz de descrever o comportamento do osso, acoplando ações de reabsorção e de formação óssea, na presença de estímulos.

Existem muitas formas de descrever esse comportamento do osso e duas abordagens podem ser consideradas: a mecânica e a fenomenológica.

Na abordagem mecânica, é definida uma lei matemática para descrever a evolução da densidade como uma resposta direta das mudanças no ambiente mecânico (RÜBERG, 2003). Na abordagem fenomenológica, mais recente, o conceito básico é construir modelos baseados nos efeitos microestruturais do material (HAZELWOOD et al., 2001).

Os trabalhos de Jacobs et al. (1997), Ramtani e Zidi (1999), Barbero, Greco e Lonetti (2005), Nguyen (2005) e Einav, Houlsby e Nguyen (2007) apresentam uma abordagem mecânica, baseada na termodinâmica, para a remodelação óssea, utilizando dano, deformação plástica e reparação óssea como variáveis, não necessariamente todas associadas em um mesmo modelo.

Neste trabalho, a teoria da elasto-plasticidade apresentada por Feijóo e Zouain (1988), Feijóo (1991), Hecke (1991), Zouain et al. (1992), e também Han e Reddy (1999), que utiliza conceitos da Análise Convexa (ROCKAFELLAR, 1973 e HIRRIART-URRUTY e LEMARECHAL, 1993) e da Termodinâmica (LEMAITRE e CHABOCHE, 1990 e NGUYEN, 2000), é adaptada para descrever a lei da remodelação óssea, que é caracterizada pela ação de processos dissipativos (reabsorção óssea) e de ganho de energia (reparação óssea).

O sistema considerado na formulação é um sistema termodinâmico aberto, que recebe energia (por meio dos processos biológicos) para o caso do ganho de rigidez e que dissipa energia no caso da perda de rigidez.

Para descrever o comportamento do material são definidos dois potenciais termodinâmicos, sendo esses uma função de energia (potencial para as forças) e uma função de dissipação (potencial para os fenômenos irreversíveis). As relações constitutivas e equações de balanço são derivadas diretamente da primeira lei e da segunda lei da termodinâmica, cujas equações estão definidas no Apêndice A,

utilizando esses potenciais.

A formulação utilizada é baseada na termodinâmica generalizada, onde variáveis internas são introduzidas nas relações constitutivas para descrever os processos inelásticos que ocorrem nos materiais. Mais especificamente, serão apresentadas as formulações com a utilização de variáveis internas escalares.

No presente trabalho pretende-se descrever a equação constitutiva de maneira sucinta, para que a mesma possa ser solucionada com o uso de algoritmos da Programação Matemática (MAIER, 1973).

A formulação apresentada neste trabalho também está definida nos trabalhos de Mildred Ballin Hecke e colaboradores (HECKE, 2008; MERCURI, 2008; ALMEIDA, 2008, entre outros) e é perfeitamente adaptada para ser combinada com a discretização espacial do Método dos Elementos Finitos.

Para definir as variáveis internas de perda e ganho de rigidez, serão utilizados como referência os trabalhos de Jacobs et al. (1997), Zioupos e Casinos (1998), Kroll (2000), Verna et al. (2004), Sahar et al. (2005), McNamara e Prendergast (2007) entre outros, que apresentam resultados experimentais e analíticos sobre os mecanismos e os estímulos que definem a perda e o ganho de rigidez para diversos tipos de ossos.

Para aferir os modelos de remodelação óssea propostos neste trabalho não foram realizados ensaios de laboratório específicos e a definição dos parâmetros dos materiais foi obtida a partir de resultados de ensaios disponíveis na literatura, principalmente nos trabalhos de Kopperdahl e Keaveny (1998), Doblaré, García e Gómez (2004), Bayraktar et al. (2004), Zysset e Rincón-Kohli (2006), Yang et al. (2006) e Rincón-Kohli e Zysset (2008).

É importante ressaltar que nesses trabalhos a densidade efetiva é definida como uma função do módulo de Young, sem qualquer referência a uma lei que estabeleça sua variação em função de variáveis internas, utilizadas na formulação proposta no presente trabalho.

Em virtude da falta de resultados experimentais que definem uma lei para a variação da densidade efetiva em função das variáveis internas de perda e de ganho de rigidez, a mesma será relacionada diretamente ao módulo de Young, como sugerem os trabalhos de Kopperdahl e Keaveny (1998), Zysset e Rincón-Kohli (2006) e Rincón-Kohli e Zysset (2008).

### 3.1 VARIÁVEIS DE ESTADO

O processo de perda e reparação óssea, que é um processo interno que ocorre na estrutura do sólido, estará completamente definido, para o caso isotérmico, se forem conhecidos o tensor de deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (variável observável) e um conjunto de  $N$  variáveis internas escalares  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_N\}$ . Algumas dessas variáveis internas, chamadas de  $\{\alpha_d\}_i$ , serão utilizadas para descrever o processo de perda de rigidez (microfissuração, perda óssea), enquanto outras, chamadas de  $\{\alpha_h\}_j$  serão utilizadas para descrever o processo de ganho de rigidez (formação, ganho ósseo).

As variáveis internas podem ser definidas de maneira que fatores relacionados à microfissuração ou até mesmo a componentes biológicos do material sejam considerados.

A densidade aparente  $\rho$  é afetada pelos mecanismos de perda e reparação, de forma que:

$$\rho = \rho(\{\alpha_d\}_i, \{\alpha_h\}_j) \quad (3.1)$$

O estado termodinâmico atual pode ser descrito pela densidade de energia livre de Helmholtz  $\psi$ , que é uma função própria e estritamente convexa de variáveis observáveis e internas

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \{\alpha_d\}_i, \{\alpha_h\}_j) \quad (3.2)$$

sendo  $\boldsymbol{\varepsilon}$  o tensor de deformações admissíveis e  $\{\alpha_d\}_i, \{\alpha_h\}_j$  as variáveis internas utilizadas para descrever a perda e o ganho de rigidez.

Para o material elástico linear, a densidade de energia livre de Helmholtz  $\psi$  é definida por:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \{\alpha_d\}_i, \{\alpha_h\}_j) = \frac{1}{2\rho} \mathbf{ID}(\{\alpha_d\}_i, \{\alpha_h\}_j) \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.3)$$

onde  $\mathbf{ID}(\{\alpha_d\}_i, \{\alpha_h\}_j)$  é um tensor de quarta ordem chamado tensor elástico, que incorpora os efeitos de perda e ganho de rigidez e o símbolo  $(\bullet)$  representa o produto escalar.

As variáveis duais, que são a tensão  $\boldsymbol{\sigma}$  e o conjunto de forças



termodinâmicas  $\{A^d\}_i$ ,  $\{A^h\}_j$  associadas ao conjunto de variáveis internas  $\{\alpha_d\}_i$ ,  $\{\alpha_h\}_j$ , são derivadas da densidade de energia livre  $\psi$  de acordo com as leis de estado:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h) = \rho(\alpha_d, \alpha_h) \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{ID}(\alpha_d, \alpha_h) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} A^d(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h) &= -\rho(\alpha_d, \alpha_h) \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h)}{\partial \alpha_d} \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{ID}(\alpha_d, \alpha_h)}{\partial \alpha_d} - \frac{1}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \frac{\partial \rho(\alpha_d, \alpha_h)}{\partial \alpha_d} \mathbf{ID}(\alpha_d, \alpha_h) \right] \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} A^h(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h) &= \rho(\alpha_d, \alpha_h) \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h)}{\partial \alpha_h} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{ID}(\alpha_d, \alpha_h)}{\partial \alpha_h} - \frac{1}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \frac{\partial \rho(\alpha_d, \alpha_h)}{\partial \alpha_h} \mathbf{ID}(\alpha_d, \alpha_h) \right] \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde, para simplificar a notação, é usado  $\alpha_d$  e  $\alpha_h$  para representar os conjuntos  $\{\alpha_d\}_i$ ,  $\{\alpha_h\}_j$  e  $A^d$ ,  $A^h$  para representar os conjuntos  $\{A^d\}_i$ ,  $\{A^h\}_j$ .

A função convexa dual, ou função conjugada  $\psi_c$  de  $\psi$  é obtida pela transformada de Legendre-Fenchel

$$\frac{1}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h) = \sup_{\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h} [\boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} - A^d \bullet \alpha_d + A^h \bullet \alpha_h - \rho(\alpha_d, \alpha_h) \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h)] \quad (3.7)$$

e pode ser usada para definir as leis de estado na forma equivalente

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \frac{\partial \psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.8)$$

$$\alpha_d = -\frac{1}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \frac{\partial \psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\partial A^d} \quad (3.9)$$

$$\alpha_h = \frac{1}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \frac{\partial \psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\partial A^h} \quad (3.10)$$

para a obtenção da deformação  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e do conjunto de variáveis internas  $\alpha_d, \alpha_h$ , utilizados para descrever o ganho e a perda de rigidez.

### 3.2 LEIS DE EVOLUÇÃO

Para completar as equações constitutivas, as leis de evolução das variáveis internas (perda e ganho de rigidez) devem ser acrescentadas às leis de estado. A teoria de processos termodinâmicos irreversíveis define uma orientação e algumas restrições para as leis de evolução, de tal forma que o segundo princípio da termodinâmica seja satisfeito para qualquer evolução do material, ou seja, tal que a dissipação seja não negativa (CHABOCHE, 1993).

De maneira análoga a teoria da elasticidade, dois modelos podem ser construídos. O primeiro, no qual se baseia este trabalho, utiliza a lei associada onde a regra da normalidade é válida. O segundo, com lei não associada, implica na construção de um duplo potencial, função de duas variáveis, biconvexo e que satisfaz as desigualdades generalizadas de Fenchel, cuja proposta é encontrada nos trabalhos de Buliga, de Saxcé e Vallée (2008) e de Bodovillé e de Saxcé (2001), entre outros.

Neste trabalho, as leis de evolução das variáveis internas serão construídas com base na análise convexa. O Teorema 1 será utilizado para formular as leis de evolução, que podem ser definidas de duas formas diferentes conforme apresentado por Han e Reddy (1999).

**Teorema 1.** Seja  $X$  um espaço reflexivo de Banach, e seja  $g : X \rightarrow R$  uma função própria, convexa e fraca semi-continua. Dados  $x \in X$  e  $x^* \in X^*$ , então

$$x^* \in \partial g(x) \leftrightarrow x \in \partial g_c(x^*) \quad (3.11)$$

onde  $\partial g(x)$  é o subdiferencial da função  $g(x)$  e  $g_c$  é a função conjugada de  $g$ .

Na aplicação do Teorema 1, assume-se que o espaço vetorial  $X$  corresponde ao espaço das taxas de deformações generalizadas e o espaço vetorial  $X^*$  corresponde ao espaço das tensões generalizadas.

Considera-se a região das forças termodinâmicas admissíveis  $P$  definida por:

$$P = \left\{ (\sigma, \{A^d\}_i, \{A^h\}_j) / f(\sigma, \{A^d\}_i, \{A^h\}_j) \leq 0 \right\} \quad (3.12)$$

mas, como para o remodelamento ósseo proposto nesse trabalho, não há dissipação no campo das tensões, uma vez que as mesmas são consideradas

elásticas, considera-se a região das forças termodinâmicas admissíveis  $P_A$  definida pela projeção da região  $P$  no campo das forças termodinâmicas.

Dessa forma, define-se  $P_A$  por:

$$P_A = \left\{ \left( \{A^d\}_i, \{A^h\}_j \right) / f(\sigma, \{A^d\}_i, \{A^h\}_j) \leq 0 \right\} \quad (3.13)$$

que é assumida como um conjunto fechado, convexo e não vazio.

A função  $f(\sigma, A)$  é chamada de função de remodelamento e é equivalente a função de escoamento usada na teoria da plasticidade.

Existe uma “zona morta” onde não pode ocorrer nem degradação e nem ganho de resistência elástica e isso ocorre quando  $f(\sigma, A) < 0$ ; enquanto que o comportamento de perda e ganho de resistência ocorre quando  $f(\sigma, A) = 0$ .

Seja  $\chi$  a função suporte de  $P_A$ :

$$\chi(\dot{\alpha}) = \sup_{A^* \in P_A} \left\{ A^* \bullet \dot{\alpha} \right\} \quad (3.14)$$

onde,  $\dot{\alpha}$  é a taxa das variáveis internas e, no contexto da elasto-plasticidade,  $\chi$  é a função dissipação e neste trabalho, é a energia dissipada ou introduzida no sistema. Essa função é conjugada a função indicatriz de  $P_A$  ( $Ind_{P_A}$ ), definida por:

$$Ind_{P_A}(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A \in P_A \\ \infty & \text{se } A \notin P_A \end{cases} \quad (3.15)$$

e tem as seguintes propriedades: convexa, positiva homogênea, fraca semi-contínua,  $\chi(\dot{\alpha}) \geq 0$  e contém a origem  $\chi(0) = 0$ . Portanto, do Teorema 1 tem-se:

$$\dot{\alpha} \in \partial Ind_{P_A} \leftrightarrow A \in \partial \chi(\dot{\alpha}) \quad (3.16)$$

A equação (3.16) permite estabelecer duas formas equivalentes de lei de evolução, como já explicitado. O Lema apresentado a seguir completa a teoria e permite escrever a lei de evolução usando um multiplicador  $\lambda$ .

**Lema.** Seja a função  $f(\sigma, A)$  não-negativa e convexa, com  $f(0) = 0$  e sejam as forças termodinâmicas  $A^*$  um ponto no interior do  $dom(f)$  tal que  $f(\sigma, A^*) > 0$ .

Seja  $P_A = \{A / f(\boldsymbol{\sigma}, A) \leq f(\boldsymbol{\sigma}, A^*)\}$ . Então  $\dot{\alpha} \in \partial Ind_{P_A}$ , se e somente se, existir um  $\lambda \geq 0$  tal que  $\dot{\alpha} \in \lambda \partial f(\boldsymbol{\sigma}, A^*)$ .

Considera-se que a função  $f$  pode ser uma função de remodelamento com uma forma qualquer.

Então, do Lema apresentado, é possível obter:

$$\dot{\alpha} \in \partial Ind_{P_A} \leftrightarrow \exists \lambda \geq 0, \text{ tal que } \dot{\alpha} \in \lambda \partial f(\boldsymbol{\sigma}, A) \quad (3.17)$$

A equação (3.17) representa a generalização da lei da normalidade.

A definição de região convexa de forças termodinâmicas admissíveis deve ser feita experimentalmente, então, o contorno da região que limita os valores das forças termodinâmicas (ou a composição delas) determina uma alteração na resistência (perda ou ganho de resistência).

### 3.3 FORMULAÇÃO EM TAXAS PARA AS EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS DE DANO-REMODELAÇÃO

No trabalho em questão, a formulação em taxas proposta por HECKE (1991) para o modelo elasto-plástico é adaptada para o modelo constitutivo de dano-remodelação. Introduzindo-se o potencial

$$\begin{aligned} j_C \left( \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{A}^d, \dot{A}^h \right) = & \frac{1}{2} \nabla_{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}} \left( \frac{\psi_C(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right) \dot{\boldsymbol{\sigma}} \bullet \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \nabla_{\boldsymbol{\sigma} A^d} \left( \frac{\psi_C(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right) \dot{\boldsymbol{\sigma}} \bullet \dot{A}^d + \\ & + \nabla_{\boldsymbol{\sigma} A^h} \left( \frac{\psi_C(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right) \dot{\boldsymbol{\sigma}} \bullet \dot{A}^h + \frac{1}{2} \nabla_{A^d A^d} \left( \frac{\psi_C(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right) \dot{A}^d \bullet \dot{A}^d + \\ & + \frac{1}{2} \nabla_{A^h A^h} \left( \frac{\psi_C(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right) \dot{A}^h \bullet \dot{A}^h + 2 \nabla_{A^d A^h} \left( \frac{\psi_C(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right) \dot{A}^d \bullet \dot{A}^h \end{aligned} \quad (3.18)$$

para o qual  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{A}^d, \dot{A}^h$  são, respectivamente, as taxas de tensão, de força termodinâmica de perda de rigidez e de força termodinâmica de ganho de rigidez, e o conjugado

$$j \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\alpha}_d, \dot{\alpha}_h \right) = \sup_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{A}^d, \dot{A}^h} \left[ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \bullet \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{A}^d \bullet \dot{\alpha}_d + \dot{A}^h \bullet \dot{\alpha}_h - j_C \left( \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{A}^d, \dot{A}^h \right) \right] \quad (3.19)$$

de tal forma que

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}} j_C \left( \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{A}^d, \dot{A}^h \right) \quad (3.20)$$

$$\dot{\alpha}_d = \nabla_{\dot{A}^d} j_C \left( \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{A}^d, \dot{A}^h \right) \quad (3.21)$$

$$\dot{\alpha}_h = \nabla_{\dot{A}^h} j_C \left( \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{A}^d, \dot{A}^h \right) \quad (3.22)$$

ou na forma equivalente

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \nabla_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} j \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\alpha}_d, \dot{\alpha}_h \right) \quad (3.23)$$

$$\dot{A}^d = \nabla_{\dot{\alpha}_d} j \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\alpha}_d, \dot{\alpha}_h \right) \quad (3.24)$$

$$\dot{A}^h = \nabla_{\dot{\alpha}_h} j \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\alpha}_d, \dot{\alpha}_h \right) \quad (3.25)$$

ou ainda, na forma condensada

$$\left( \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{A}^d, \dot{A}^h \right) = \nabla j \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\alpha}_d, \dot{\alpha}_h \right) \Leftrightarrow \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\alpha}_d, \dot{\alpha}_h \right) = \nabla j_C \left( \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{A}^d, \dot{A}^h \right) \quad (3.26)$$

Definindo a região de taxas de forças termodinâmicas admissíveis como um cone polar de  $\partial Ind_{P_A}(A)$ :

$$\left( \dot{A}^* \right) \in \dot{P}_A = [\partial Ind_{P_A}(A)]^{-1} \Leftrightarrow \dot{\alpha} \cdot \dot{A}^* \leq 0 \quad (3.27)$$

e usando os mesmos argumentos de Hecke (1991) para o modelo elasto-plástico, pode-se obter:

$$\left( \dot{\alpha} \right) \in \partial Ind_{P_A} \left( \dot{A} \right) \quad (3.28)$$

A equação (3.28) torna possível considerar o retorno para a “zona morta” ou o descarregamento.

Se  $A$  representa um conjunto de forças termodinâmicas em uma superfície

de remodelamento e  $\dot{A}$  representa a taxa no interior da região de forças admissíveis  $\dot{P}_A$ , então  $\partial Ind_{P_A}(\dot{A}) = 0$ , o que representa que não há processo de perda ou ganho de resistência,  $(\dot{\alpha}) = (0)$ .

Na Tabela 3.1 é apresentado um resumo das relações constitutivas com a descrição da evolução das variáveis em termos de taxas.

Tabela 3.1 – Relações constitutivas e evolução das variáveis em termos de taxas

---


$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h) = \frac{1}{2\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \mathbf{ID}(\alpha_d, \alpha_h) \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h) = \sup_{\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h} [\boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} - A^d \bullet \alpha_d + A^h \bullet \alpha_h - \rho(\alpha_d, \alpha_h) \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h)]$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h) = \rho(\alpha_d, \alpha_h) \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{ID}(\alpha_d, \alpha_h) \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$A^d(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h) = -\rho(\alpha_d, \alpha_h) \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h)}{\partial \alpha_d}$$

$$A^h(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h) = \rho(\alpha_d, \alpha_h) \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h)}{\partial \alpha_h}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left( \frac{\psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right)$$

$$\alpha_d = -\frac{\partial}{\partial A^d} \left( \frac{\psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right)$$

$$\alpha_h = \frac{\partial}{\partial A^h} \left( \frac{\psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right)$$

$$\left( -\dot{\alpha}_d, \dot{\alpha}_h \right) \in \partial Ind_{P_A}(A^d, A^h)$$

$$j_C \left( \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{A}^d, \dot{A}^h \right) = \frac{1}{2} \nabla_{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}} \left( \frac{\psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right) \dot{\boldsymbol{\sigma}} \bullet \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \nabla_{\boldsymbol{\sigma} A^d} \left( \frac{\psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right) \dot{\boldsymbol{\sigma}} \bullet \dot{A}^d +$$

$$+ \nabla_{\boldsymbol{\sigma} A^h} \left( \frac{\psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right) \dot{\boldsymbol{\sigma}} \bullet \dot{A}^h + \frac{1}{2} \nabla_{A^d A^d} \left( \frac{\psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right) \dot{A}^d \bullet \dot{A}^d +$$

$$+ \frac{1}{2} \nabla_{A^h A^h} \left( \frac{\psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right) \dot{A}^h \bullet \dot{A}^h + 2 \nabla_{A^d A^h} \left( \frac{\psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right) \dot{A}^d \bullet \dot{A}^h$$


---

---


$$j\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\alpha}_d, \dot{\alpha}_h\right) = \sup_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{A}^d, \dot{A}^h} \left[ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \bullet \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{A}^d \bullet \dot{\alpha}_d + \dot{A}^h \bullet \dot{\alpha}_h - j_C\left(\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{A}^d, \dot{A}^h\right) \right]$$

$$\left(\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{A}^d, \dot{A}^h\right) = \nabla j\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\alpha}_d, \dot{\alpha}_h\right) \quad \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\alpha}_d, \dot{\alpha}_h\right) = \nabla j_C\left(\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{A}^d, \dot{A}^h\right)$$


---

### 3.4 FORMULAÇÃO EM INCREMENTOS PARA AS EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS DE DANO-REMODELAÇÃO

Para se fazer a implementação da formulação proposta, é necessário escrever as equações que estão na forma contínua em uma forma discreta, ou seja, transformar as taxas em incrementos.

Considera-se um intervalo de tempo  $[0, T]$ , no qual se define o processo de dano-reparação. Este intervalo de tempo é dividido em  $N$  subintervalos de tamanhos  $\Delta T$ , não necessariamente iguais, de acordo com

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n < t_{n+1} < \dots < t_{N-2} < t_{N-1} < t_N = T \quad (3.29)$$

Um problema de evolução discreta consiste em avaliar as variáveis envolvidas no final de cada passo de tempo, começando dos seus valores no início do intervalo e considerando o incremento de deformações.

Assumindo-se que o valor de uma variável qualquer  $\beta$  no tempo  $t_n$  é  $\beta(t_n) = \beta_n$  e que  $\Delta\beta = \beta_n - \beta_{n-1}$ , a solução do problema no intervalo de  $[0, T]$  é obtida resolvendo-se  $N$  problemas sucessivos de passo de tempo conhecido e finito.

Para garantir a convergência e a estabilidade da solução, um método implícito deve ser considerado.

Aplicando-se uma aproximação do tipo Euler regressivo e usando:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} = \frac{\partial \psi_c(\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}, A_{t+\Delta t}^d, A_{t+\Delta t}^h)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.30)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{\sigma}_t + \Delta \boldsymbol{\sigma} \quad (3.31)$$

$$(\alpha_d)_{t+\Delta t} = (\alpha_d)_t + \Delta \alpha_d \quad (\alpha_h)_{t+\Delta t} = (\alpha_h)_t + \Delta \alpha_h \quad (3.32)$$

$$(A^d)_{t+\Delta t} = (A^d)_t + \Delta A^d \quad (A^h)_{t+\Delta t} = (A^h)_t + \Delta A^h \quad (3.33)$$

Escrevendo-se o potencial da equação (3.18) na forma incremental tem-se:

$$\begin{aligned}
 j_C \left( \Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta A^d, \Delta A^h \right) = & \left( \frac{\psi_C \left( \boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}, A^d + \Delta A^d, A^h + \Delta A^h \right)}{\rho(\alpha_d + \Delta \alpha_d, \alpha_h + \Delta \alpha_h)} \right) - \Delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} \left( \frac{\psi_C \left( \boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h \right)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right) \\
 & - \Delta A^d \cdot \nabla_{A^d} \left( \frac{\psi_C \left( \boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h \right)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right) - \Delta A^h \cdot \nabla_{A^h} \left( \frac{\psi_C \left( \boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h \right)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right) \\
 & - \left( \frac{\psi_C \left( \boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h \right)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right)
 \end{aligned} \quad (3.34)$$

e o conjugado

$$j \left( \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \alpha_d, \Delta \alpha_h \right) = \sup_{\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta A^d, \Delta A^h} \left[ \Delta \boldsymbol{\sigma} \bullet \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta A^d \bullet \Delta \alpha_d + \Delta A^h \bullet \Delta \alpha_h - j_C \left( \Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta A^d, \Delta A^h \right) \right] \quad (3.35)$$

de tal forma que

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_{\Delta \boldsymbol{\sigma}} j_C \left( \Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta A^d, \Delta A^h \right) \quad (3.36)$$

$$\Delta \alpha_d = \nabla_{\Delta A^d} j_C \left( \Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta A^d, \Delta A^h \right) \quad (3.37)$$

$$\Delta \alpha_h = \nabla_{\Delta A^h} j_C \left( \Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta A^d, \Delta A^h \right) \quad (3.38)$$

ou na forma equivalente

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \nabla_{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}} j \left( \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \alpha_d, \Delta \alpha_h \right) \quad (3.39)$$

$$\Delta A^d = \nabla_{\Delta \alpha_d} j \left( \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \alpha_d, \Delta \alpha_h \right) \quad (3.40)$$

$$\Delta A^h = \nabla_{\Delta \alpha_h} j \left( \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \alpha_d, \Delta \alpha_h \right) \quad (3.41)$$

ou ainda, na forma condensada



$$\left( \Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta A^d, \Delta A^h \right) = \nabla j \left( \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \alpha_d, \Delta \alpha_h \right) \Leftrightarrow \left( \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \alpha_d, \Delta \alpha_h \right) = \nabla j_C \left( \Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta A^d, \Delta A^h \right) \quad (3.42)$$

As equações definidas em (3.42) são satisfeitas no final de cada passo de tempo, que no caso da formulação apresentada está associado à evolução das variáveis devido ao carregamento.

A vantagem dessa formulação é que o processo de solução toma a forma da minimização de uma função convexa em um conjunto convexo, ou seja, é um problema de otimização convexo.

Os incrementos de tensão e de forças termodinâmicas  $(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta A^d, \Delta A^h)$  podem ser determinados a partir dos incrementos de deformação e de variáveis internas  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \alpha_d, \Delta \alpha_h$  pelas relações constitutivas (3.39) a (3.41).

Segundo Rockafellar (1973), a equação (3.43) expressa a condição necessária e suficiente que as tensões generalizadas  $(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta A^d, \Delta A^h)$  devem verificar para ser solução do problema.

$$(-\Delta \alpha_d, \Delta \alpha_h) \in \partial \text{Ind}_{P_A}(A_{t+\Delta t}^d, A_{t+\Delta t}^h) \quad (3.43)$$

Na Tabela 3.2 é apresentado um resumo das relações constitutivas com a descrição da evolução das variáveis em termos de incrementos.

Tabela 3.2 – Relações constitutivas e evolução das variáveis em termos de incrementos

---


$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}, (\alpha_d)_{t+\Delta t}, (\alpha_h)_{t+\Delta t}) = \frac{1}{2(\rho(\alpha_d)_{t+\Delta t}, (\alpha_h)_{t+\Delta t})} \mathbf{ID}((\alpha_d)_{t+\Delta t}, (\alpha_h)_{t+\Delta t}) \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} \bullet \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}$$

$$\frac{1}{\rho((\alpha_d)_{t+\Delta t}, (\alpha_h)_{t+\Delta t})} \psi_c(\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}, (A^d)_{t+\Delta t}, (A^h)_{t+\Delta t}) =$$

$$\sup_{\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}, (\alpha_d)_{t+\Delta t}, (\alpha_h)_{t+\Delta t}} \left[ \boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} \bullet \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} - (A^d)_{t+\Delta t} \bullet (\alpha_d)_{t+\Delta t} + (A^h)_{t+\Delta t} \bullet (\alpha_h)_{t+\Delta t} \right. \\ \left. - \rho((\alpha_d)_{t+\Delta t}, (\alpha_h)_{t+\Delta t}) \psi(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}, (\alpha_d)_{t+\Delta t}, (\alpha_h)_{t+\Delta t}) \right]$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{\sigma}_t + \Delta \boldsymbol{\sigma}$$

$$(A^d)_{t+\Delta t} = (A^d)_t + \Delta A^d$$

$$(A^h)_{t+\Delta t} = (A^h)_t + \Delta A^h$$


---

---


$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} &= \frac{\partial \psi_c(\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}, A_{t+\Delta t}^d, A_{t+\Delta t}^h)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\
(\alpha_d)_{t+\Delta t} &= (\alpha_d)_t + \Delta \alpha_d \\
(\alpha_h)_{t+\Delta t} &= (\alpha_h)_t + \Delta \alpha_h \\
(-\Delta \alpha_d, \Delta \alpha_h) &\in \partial \text{Ind}_{P_A}(A_{t+\Delta t}^d, A_{t+\Delta t}^h) \\
j_c(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta A^d, \Delta A^h) &= \left( \frac{\psi_c(\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}, A^d + \Delta A^d, A^h + \Delta A^h)}{\rho(\alpha_d + \Delta \alpha_d, \alpha_h + \Delta \alpha_h)} \right) - \Delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} \left( \frac{\psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right) \\
&\quad - \Delta A^d \cdot \nabla_{A^d} \left( \frac{\psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right) - \Delta A^h \cdot \nabla_{A^h} \left( \frac{\psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right) \\
&\quad - \left( \frac{\psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \right) \\
j(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \alpha_d, \Delta \alpha_h) &= \sup_{\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta A^d, \Delta A^h} \left[ \Delta \boldsymbol{\sigma} \bullet \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \Delta A^d \bullet \Delta \alpha_d + \Delta A^h \bullet \Delta \alpha_h - j_c(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta A^d, \Delta A^h) \right] \\
(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta A^d, \Delta A^h) &= \nabla j(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \alpha_d, \Delta \alpha_h) \quad (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \alpha_d, \Delta \alpha_h) = \nabla j_c(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta A^d, \Delta A^h)
\end{aligned}$$


---

Para a implementação da formulação proposta é necessário trabalhar com os gradientes de  $\psi_c$  ( $\nabla \psi_c$ ) e de  $j_c$  ( $\nabla j_c$ ). O Teorema 2, da Análise Convexa, descrito a seguir, fundamenta a definição desses gradientes.

**Teorema 2.** Para qualquer conjunto compacto  $Y \subset \mathbb{R}^p$ , seja  $g: \mathbb{R}^n \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que satisfaz as seguintes propriedades:

- para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $g(x, \cdot)$  é semi-continua superior;
- para cada  $y \in Y$ ,  $g(\cdot, y)$  é convexa diferenciável;
- a função  $f = \sup_{y \in Y} g(\cdot, y)$  é finita em  $\mathbb{R}^n$ ;
- em algum  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $g(x, \cdot)$  é maximizada em um único  $y(x) \in Y$

então,  $f$  é diferenciável em  $x$ , e seu gradiente é:

$$\nabla f(x) \leftrightarrow \nabla_x g(x, y(x)) \quad (3.44)$$

#### **4 FORMULAÇÃO PROPOSTA PARA O CASO UNIDIMENSIONAL**

A formulação proposta para o caso unidimensional permite a análise de diversos modelos constitutivos, o que se faz com a escolha das variáveis internas e dos potenciais constitutivos. A definição de variáveis internas que consigam representar precisamente o processo de remodelação óssea está vinculada a resultados de ensaios de laboratório.

A análise apresentada para o caso unidimensional inicia-se com a generalização da influência das variáveis internas de ganho e perda de rigidez, seguindo com a particularização do modelo de remodelação nos exemplos unidimensionais propostos.

Uma das principais características dos potenciais apresentados é a convexidade, mas, segundo Contrafatto e Cuomo (2002), em alguns casos não se tem essa convexidade para o domínio todo, se fazendo necessária a imposição de restrições de domínios admissíveis para a formulação.

A visualização das forças termodinâmicas, das regiões admissíveis e da evolução das variáveis internas é de grande valor no estudo do remodelamento ósseo. Para isso será analisada de forma teórica, considerando o problema unidimensional, uma trabécula óssea sujeita a um carregamento que estabelece o remodelamento ósseo. Os resultados obtidos estão descritos no item 4.2.

Para finalizar o caso unidimensional será apresentado um exemplo de uma barra engastada em uma das extremidades, simulando uma trabécula óssea com possibilidade de consideração de fases de remodelamento (dano e reparação) diferentes nos dois elementos.

Para obter os resultados do exemplo do item 4.3 foi utilizado o programa REMOLD 1D, desenvolvido para o caso unidimensional, com a implementação da teoria apresentada neste trabalho. Maiores detalhes sobre o programa são apresentados no item 6.

Os resultados obtidos nesse exemplo serão comparados aos descritos por Kopperdahl e Keaveny (1998), definidos no item 2.3.3 deste trabalho.

#### 4.1 FORMULAÇÃO UNIDIMENSIONAL COM VARIÁVEIS INTERNAS ESCALARES DE GANHO E PERDA DE RIGIDEZ

Para o caso unidimensional geral, a formulação apresentada no item 3 será reescrita considerando-se:

$$\mathbf{ID}(\alpha_d, \alpha_h) \equiv E_0 (1 - \alpha_d)^{n_d} (1 + \alpha_h)^{n_h} \quad (4.1)$$

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_x \quad (4.2)$$

onde  $E_0$  é o módulo de elasticidade longitudinal (módulo de Young) para o material íntegro (sem dano e sem reparação),  $n_d$  é o expoente da parcela de dano e  $n_h$  é o expoente da parcela de recuperação e  $\varepsilon_x \in \mathbf{R}$  é a deformação longitudinal (paralela à orientação longitudinal de trabécula).

As equações da Energia Livre de Helmholtz e das tensões generalizadas, conforme apresentadas na Tabela 3.1, podem ser reescritas de acordo com as equações (4.3) a (4.6).

$$\psi(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) = \frac{1}{2\rho(\alpha_d, \alpha_h)} E_0 (1 - \alpha_d)^{n_d} (1 + \alpha_h)^{n_h} \cdot \varepsilon_x^2 \quad (4.3)$$

$$\sigma(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) = E_0 (1 - \alpha_d)^{n_d} (1 + \alpha_h)^{n_h} \cdot \varepsilon_x \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} A^d(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) &= -\rho(\alpha_d, \alpha_h) \frac{\partial \psi(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h)}{\partial \alpha_d} \\ &= -\frac{1}{2} \left[ -E_0 n_d (1 - \alpha_d)^{n_d-1} (1 + \alpha_h)^{n_h} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \frac{\partial \rho(\alpha_d, \alpha_h)}{\partial \alpha_d} E_0 (1 - \alpha_d)^{n_d} (1 + \alpha_h)^{n_h} \right] \cdot \varepsilon_x^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} A^h(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) &= \rho(\alpha_d, \alpha_h) \frac{\partial \psi(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h)}{\partial \alpha_h} \\ &= \frac{1}{2} \left[ E_0 n_h (1 - \alpha_d)^{n_d} (1 + \alpha_h)^{n_h-1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \frac{\partial \rho(\alpha_d, \alpha_h)}{\partial \alpha_h} E_0 (1 - \alpha_d)^{n_d} (1 + \alpha_h)^{n_h} \right] \cdot \varepsilon_x^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

A função de remodelamento para o caso unidimensional é definida em função das variáveis duais, logo, é proposta uma função de remodelamento que leva em consideração a tensão e as forças termodinâmicas  $f = f(\sigma, A^d, A^h)$ .

A função de remodelamento adotada para o caso unidimensional é:

$$f(\sigma, A^d, A^h) = \sigma - (\sigma_0 - A^d + A^h) \quad (4.7)$$

onde  $\sigma_0$  é a tensão que referencia o início do remodelamento ósseo.

Essa forma de apresentar a função de remodelamento é uma adaptação do que é apresentado por Contrafatto e Cuomo (2002).

Para a função de remodelamento definida na equação (4.7) a região admissível é definida por:

$$P = \{(\sigma, A^d, A^h) / f(\sigma, A^d, A^h) \leq 0\} \quad (4.8)$$

No caso do comportamento elástico do material, que é o foco do trabalho, não há dissipação no campo das tensões. Dessa forma, a região admissível  $P_A$  passa a ser a projeção da região  $P$  no domínio das forças termodinâmicas e é definida por:

$$P_A = \{(A^d, A^h) / f(\sigma, A^d, A^h) \leq 0\} \quad (4.9)$$

No trabalho de Barbero, Greco e Lonetti (2005) as variáveis de perda e reparação são definidas com influência linear das variáveis internas no processo constitutivo. Esta consideração, associada aos resultados dos ensaios descritos na Figura 2.18 servem de embasamento para uma escolha da influência linear das variáveis internas nos dois exemplos que serão apresentados para o caso unidimensional.

Uma adaptação do que é apresentado na Figura 2.18 é a atribuição de que no descarregamento o diagrama volta para a origem, ou seja, não serão consideradas as deformações residuais.

Além disso, como não está disponível na literatura uma lei específica de variação da densidade efetiva em função das variáveis internas, a densidade será considerada independente das variáveis internas e variável de acordo com o módulo de Young, de acordo com a relação linear descrita na Tabela 2.2.

## 4.2 EXEMPLO UNIDIMENSIONAL DE TRABÉCULA ÓSSEA COM DENSIDADE INDEPENDENTE DAS VARIÁVEIS INTERNAS

Neste exemplo será considerado um problema unidimensional de uma barra, conforme a Figura 4.1, que simula uma trabécula óssea, com densidade efetiva independente das variáveis internas e carga axial ( $Q$ ) que estabelece o remodelamento ósseo, aplicada de forma incremental em um determinado passo.

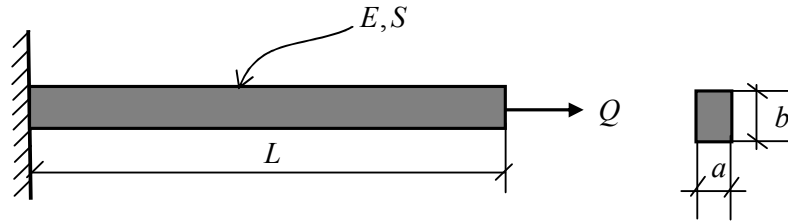


Figura 4.1 – Barra que simula uma trabécula óssea.

Para a geração dos gráficos representativos do fenômeno de remodelamento foram adotados os seguintes valores para as propriedades do material:

$$\rho = 0,19 \text{ g/cm}^3$$

$$E_0 = 2100 \cdot \rho = 399 \text{ MPa} \quad (\text{Kopperdahl e Keaveny, 1998})$$

$$\sigma_0 = 1,5 \text{ MPa}$$

Os valores da carga concentrada ( $Q$ ), do comprimento ( $L$ ) e da área da seção transversal ( $S$ ) não serão necessários para a análise apresentada.

Serão considerados ainda, os intervalos de valores de deformação ( $0 \leq \varepsilon_x \leq 0,03$ ) e das variáveis internas de remodelamento ( $0 \leq \alpha_d \leq 1$ ) e ( $0 \leq \alpha_h \leq 1$ ).

É importante observar que a consideração da variável de ganho de rigidez no intervalo de 0 até 1 é apenas uma hipótese adotada para o exemplo, o que implica na não recuperação completa do módulo de Young mesmo no final da fase de ganho de rigidez. De fato, a variável de ganho de rigidez assume valores superiores a 1, se o módulo de Young pode ser recuperado totalmente.

Considera-se  $n_d = 1$  e  $n_h = 1$  (influência linear dos parâmetros relacionados às variáveis internas) e a densidade invariável em relação às variáveis internas:

$$\rho(\alpha_d, \alpha_h) = \rho \quad (4.10)$$

Com a imposição dessas considerações nas equações (4.3) a (4.6):

$$\psi(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) = \frac{1}{2\rho} E_0 (1 - \alpha_d)(1 + \alpha_h) \cdot \varepsilon_x^2 \quad (4.11)$$

$$\sigma(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) = E_0 (1 - \alpha_d)(1 + \alpha_h) \cdot \varepsilon_x \quad (4.12)$$

$$A^d(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) = \frac{1}{2} [E_0 (1 + \alpha_h)] \cdot \varepsilon_x^2 \quad (4.13)$$

$$A^h(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) = \frac{1}{2} [E_0 (1 - \alpha_d)] \cdot \varepsilon_x^2 \quad (4.14)$$

A evolução do processo de remodelação óssea, conforme exposto no item 2.2, ocorre basicamente em três fases, a primeira onde o material íntegro recebe o carregamento mas ainda permanece íntegro, a segunda onde aparece o microdano (perda de resistência) e terceira onde o tecido ósseo sofre o processo de recuperação (ganho de resistência).

A caracterização dessas fases depende de como serão definidas as variáveis internas e os potenciais, para que sejam consideradas as particularidades do processo de remodelação que, como já foi colocado, variam de acordo com características específicas do tipo de osso, da espécie estudada e de outros fatores.

Supondo que cada uma das fases ocorre em subintervalos distintos, apresenta-se uma análise, com a definição em termos de diagramas tensão-deformação, do que ocorre em cada fase do processo de remodelação óssea. As regiões das forças termodinâmicas admissíveis também são apresentadas.

Para todas as fases, as equações são obtidas a partir da substituição das variáveis internas nas equações (4.12) a (4.14) e a função de remodelamento considerada está definida na equação (4.7).

Para definir o potencial de dissipação é necessário determinar o potencial complementar (densidade de energia livre de Gibbs), em função das variáveis duais. Dessa forma, substituindo-se a equação (4.11) na equação (3.7), tem-se para o potencial complementar:

$$\frac{1}{\rho} \psi_c(\sigma, A^d, A^h) = \sup_{\varepsilon, \alpha_d, \alpha_h} [\sigma \bullet \varepsilon_x - A^d \bullet \alpha_d + A^h \bullet \alpha_h - \frac{1}{2} E_0 (1 - \alpha_d)(1 + \alpha_h) \cdot \varepsilon_x^2] \quad (4.15)$$

ou, em função das variáveis duais, para um tempo  $t$  :

$$\frac{1}{\rho} \psi_c(\sigma, A^d, A^h) = \sup_{\varepsilon, \alpha_d, \alpha_h} \left[ \frac{3}{\sqrt[3]{2E_0}} (\sigma^2 A^d A^h)^{\frac{1}{3}} - A^d - A^h \right] \quad (4.16)$$

e ainda, para um tempo  $t + \Delta t$ :

$$\frac{1}{(\rho + \Delta\rho)} \psi_c(\sigma + \Delta\sigma, A^d + \Delta A^d, A^h + \Delta A^h) = \sup_{\varepsilon + \Delta\varepsilon, \alpha_d + \Delta\alpha_d, \alpha_h + \Delta\alpha_h} \left[ \frac{3}{\sqrt[3]{2E_0}} ((\sigma + \Delta\sigma)^2 (A^d + \Delta A^d) (A^h + \Delta A^h))^{\frac{1}{3}} - (A^d + \Delta A^d) - (A^h + \Delta A^h) \right] \quad (4.17)$$

O potencial de dissipação em incrementos, de acordo com a equação (3.34), com as simplificações em termos da densidade aparente, é definido por:

$$j_c(\Delta\sigma, \Delta A^d, \Delta A^h) = \psi_c(\sigma + \Delta\sigma, A^d + \Delta A^d, A^h + \Delta A^h) - \Delta\sigma \nabla_{\sigma} \psi_c(\sigma, A^d, A^h) - \Delta A^d \nabla_{A^d} \psi_c(\sigma, A^d, A^h) - \Delta A^h \nabla_{A^h} \psi_c(\sigma, A^d, A^h) - \psi_c(\sigma, A^d, A^h) \quad (4.18)$$

Aplicando-se as definições do Teorema 2, descrito no item 3.4, o potencial  $j_c$ , definido como função das forças termodinâmicas generalizadas (variáveis duais) é estabelecido por:

$$j_c(\Delta\sigma, \Delta A^d, \Delta A^h) = \left( \frac{3}{\sqrt[3]{2E_0}} (\sigma + \Delta\sigma)^{\frac{2}{3}} (A^d + \Delta A^d)^{\frac{1}{3}} (A^h + \Delta A^h)^{\frac{1}{3}} - (A^d + \Delta A^d) - (A^h + \Delta A^h) \right) - \Delta\sigma \left( \frac{2}{\sqrt[3]{2E_0}} \sigma^{\frac{1}{3}} (A^d)^{\frac{1}{3}} (A^h)^{\frac{1}{3}} \right) - \Delta A^d \left( \frac{1}{\sqrt[3]{2E_0}} \sigma^{\frac{2}{3}} (A^d)^{\frac{2}{3}} (A^h)^{\frac{1}{3}} - 1 \right) - \Delta A^h \left( \frac{1}{\sqrt[3]{2E_0}} \sigma^{\frac{2}{3}} (A^d)^{\frac{1}{3}} (A^h)^{\frac{2}{3}} - 1 \right) - \left( \frac{3}{\sqrt[3]{2E_0}} \sigma^{\frac{2}{3}} (A^d)^{\frac{1}{3}} (A^h)^{\frac{1}{3}} - A^d - A^h \right) \quad (4.19)$$

Os incrementos das variáveis internas são determinados por:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_d &= \nabla_{\Delta A^d} j_c(\Delta\sigma, \Delta A^d, \Delta A^h) \\ \Delta\alpha_h &= \nabla_{\Delta A^h} j_c(\Delta\sigma, \Delta A^d, \Delta A^h) \end{aligned} \quad (4.20)$$

que, para o caso em questão, ficam:

$$\Delta\alpha_d = \frac{1}{\sqrt[3]{2E_0}} \left( (\sigma + \Delta\sigma)^{\frac{2}{3}} (A^d + \Delta A^d)^{\frac{1}{3}} (A^h + \Delta A^h)^{\frac{1}{3}} - \sigma^{\frac{2}{3}} (A^d)^{\frac{2}{3}} (A^h)^{\frac{1}{3}} \right) \quad (4.21)$$



$$\Delta\alpha_h = \frac{1}{\sqrt[3]{2E_0}} \left( (\sigma + \Delta\sigma)^{\frac{2}{3}} (A^d + \Delta A^d)^{\frac{1}{3}} (A^h + \Delta A^h)^{-\frac{2}{3}} - \sigma^{\frac{2}{3}} (A^d)^{\frac{1}{3}} (A^h)^{-\frac{2}{3}} \right)$$

#### 4.2.1 Fase inicial do material

Na fase inicial do carregamento o material é considerado íntegro, logo:  $\alpha_d = 0$ ,  $\alpha_h = 0$  e as forças termodinâmicas generalizadas são:

$$\begin{aligned} \sigma(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) &= E_0 \cdot \varepsilon_x \\ A^d(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) &= \frac{1}{2} E_0 \cdot \varepsilon_x^2 \\ A^h(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) &= \frac{1}{2} E_0 \cdot \varepsilon_x^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Observa-se que para a fase onde o material se encontra íntegro, com comportamento elástico linear, as forças termodinâmicas de perda e ganho de rigidez são iguais.

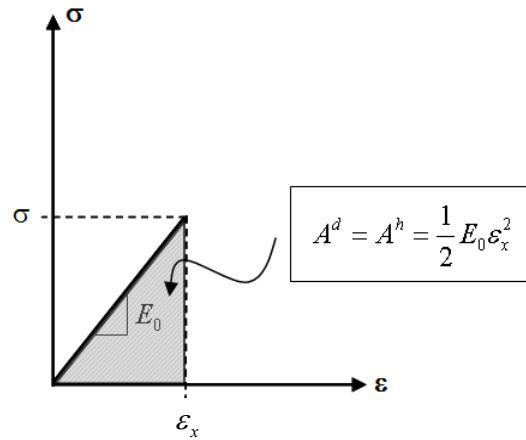


Figura 4.2 – Diagrama tensão-deformação para o material na fase inicial.

A Figura 4.2 mostra o diagrama tensão-deformação para a condição de material íntegro, com a área escurecida indicando as forças termodinâmicas de perda e de ganho de rigidez.

Substituindo-se em (4.7) as relações de (4.22) tem-se a função de remodelamento como função das variáveis primais:

$$f(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) = E_0 \cdot \varepsilon_x - \left( \sigma_0 - \frac{1}{2} E_0 \cdot \varepsilon_x^2 + \frac{1}{2} E_0 \cdot \varepsilon_x^2 \right) = E_0 \cdot \varepsilon_x - \sigma_0 \quad (4.23)$$

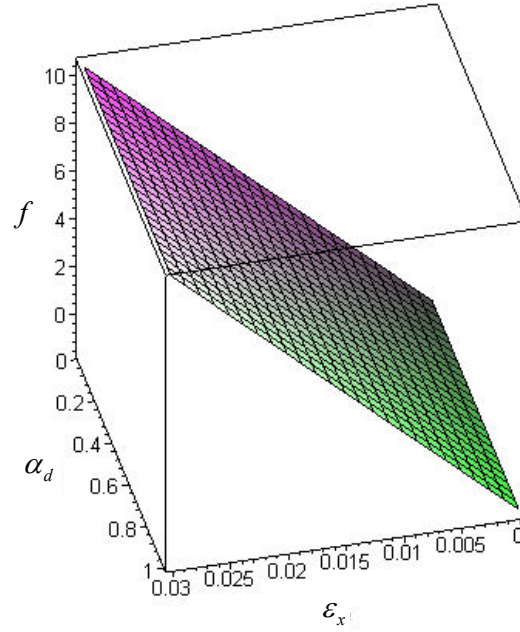


Figura 4.3 – Função de remodelamento em termos de  $\varepsilon_x$  e de  $\alpha_d$  para a fase inicial.

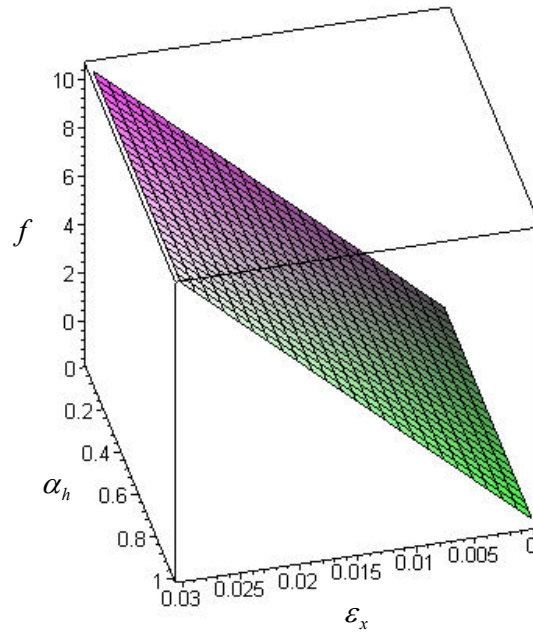


Figura 4.4 – Função de remodelamento em termos de  $\varepsilon_x$  e de  $\alpha_h$  para a fase inicial.

Tanto a Figura 4.3 quanto a Figura 4.4, ilustram a função de remodelamento definida na equação (4.23) e como a função não depende das variáveis internas de ganho e perda de rigidez, ao longo do eixo da variável interna a superfície se mantém inalterada.

#### 4.2.2 Fase de perda de rigidez do material

Na fase de perda de rigidez aparecem os efeitos de microdano no material, logo:  $\alpha_d \neq 0$ ,  $\alpha_h = 0$  e as forças termodinâmicas generalizadas são:

$$\sigma(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) = E_0(1 - \alpha_d) \cdot \varepsilon_x$$

$$A^d(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) = \frac{1}{2} E_0 \cdot \varepsilon_x^2 \quad (4.24)$$

$$A^h(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) = \frac{1}{2} E_0(1 - \alpha_d) \cdot \varepsilon_x^2$$

O diagrama da Figura 4.5 apresenta o comportamento do material que estava íntegro e nesta fase sofreu perda de rigidez.

As áreas escurecidas mostradas na Figura 4.5 representam as forças termodinâmicas de perda de rigidez ( $A^d$ ) e de ganho de rigidez ( $A^h$ ).

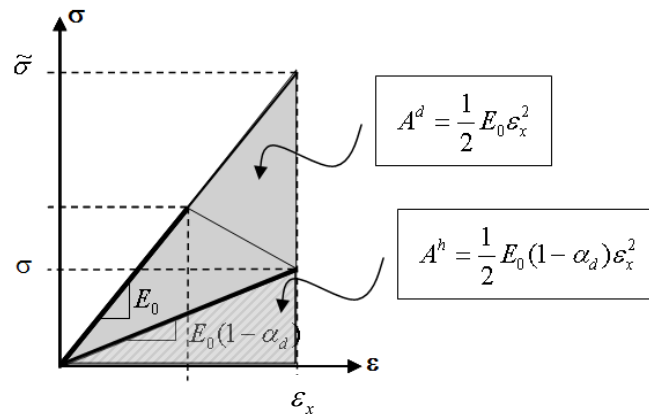


Figura 4.5 – Diagrama tensão-deformação para o material na fase de perda de rigidez.

Observa-se que  $A^d \geq A^h$  para qualquer valor de  $\varepsilon_x$  e que a força termodinâmica de perda de rigidez, para esta fase, também é determinada por:

$$A^d = \frac{1}{2} \tilde{\sigma} \varepsilon_x \quad (4.25)$$

com  $\tilde{\sigma} = E_0 \varepsilon_x$  definida como a tensão efetiva do material.

Substituindo-se em (4.7) as relações de (4.24) tem-se a função de remodelamento como função das variáveis primais:

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) &= E_0 \cdot \varepsilon_x (1 - \alpha_d) - \left( \sigma_0 - \frac{1}{2} E_0 \cdot \varepsilon_x^2 + \frac{1}{2} E_0 (1 - \alpha_d) \cdot \varepsilon_x^2 \right) \\ &= E_0 \cdot \varepsilon_x (1 - \alpha_d) - \left( \sigma_0 - \frac{1}{2} E_0 \cdot \varepsilon_x^2 \alpha_d \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

A Figura 4.6 mostra a função de remodelamento da equação (4.26). Observa-se que na fase de perda de rigidez a função de remodelamento passa a sofrer a influência da variável interna  $\alpha_d$ .

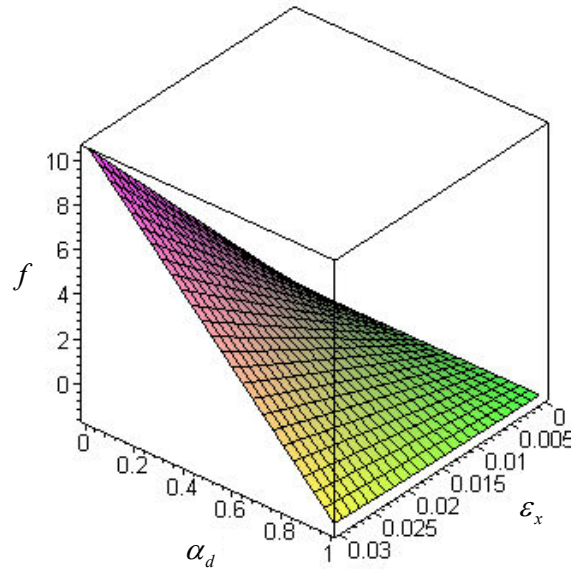


Figura 4.6 – Função de remodelamento em termos de  $\varepsilon_x$  e de  $\alpha_d$  para a fase de perda de rigidez.

Na Figura 4.7 estão representadas as curvas de nível da função de remodelamento para a fase de perda de rigidez. Essa representação no plano das variáveis primais permite uma melhor visualização do comportamento da função de remodelamento.

Observa-se que as curvas da Figura 4.7 vão se tornando mais próximas no sentido do aumento da deformação ( $\varepsilon_x$ ). Os valores de  $f(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h)$  também ficam

maiores nesse sentido, o que leva uma maior dificuldade para a satisfação da condição  $f(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) \leq 0$ .

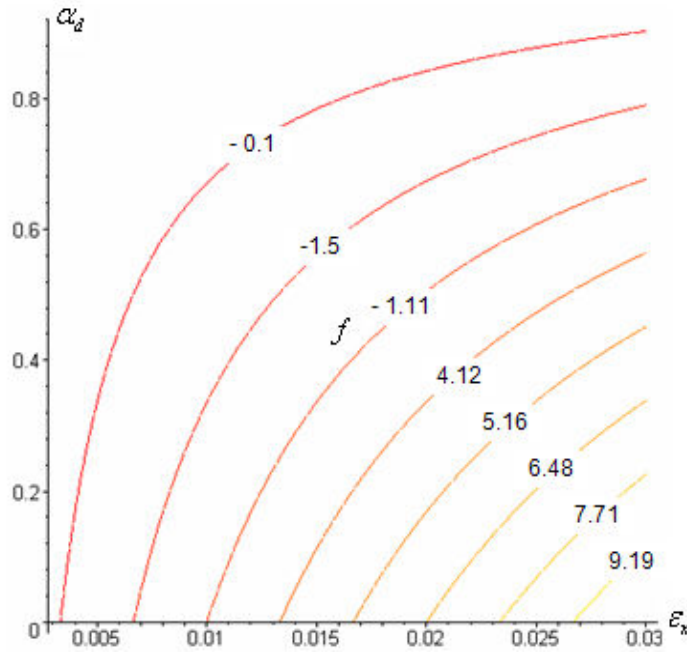


Figura 4.7 – Contornos da função de remodelamento para a fase de perda de rigidez.

#### 4.2.3 Fase de ganho de rigidez do material

Na fase de ganho de rigidez aparecem os efeitos de reparação no material, logo:  $\alpha_d = 0$ ,  $\alpha_h \neq 0$  e as forças termodinâmicas generalizadas são:

$$\begin{aligned}\sigma(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) &= E_{0h}(1 + \alpha_h) \cdot \varepsilon_x \\ A^d(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) &= \frac{1}{2} E_{0h}(1 + \alpha_h) \cdot \varepsilon_x^2 \\ A^h(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) &= \frac{1}{2} E_{0h} \cdot \varepsilon_x^2\end{aligned}\tag{4.27}$$

onde  $E_{0h} = E_0(1 - \alpha_{d,crit})$  é o módulo de Young do material no instante em que o ganho de rigidez é iniciado, ou seja, a variável de perda de rigidez atinge seu valor máximo.

O diagrama que define o comportamento do material que estava danificado e nesta fase sofreu ganho de rigidez é mostrado na Figura 4.8.

As áreas escurecidas mostradas na Figura 4.8 representam as forças termodinâmicas de perda de rigidez ( $A^d$ ) e de ganho de rigidez ( $A^h$ ).

Observa-se que  $A^d \geq A^h$  para qualquer valor de  $\varepsilon_x$  e que a força termodinâmica de ganho de rigidez, para esta fase, também é determinada por:

$$A^h = \frac{1}{2} \tilde{\sigma} \varepsilon_x \quad (4.28)$$

com  $\tilde{\sigma} = E_0 \varepsilon_x$  definida como a tensão efetiva do material.

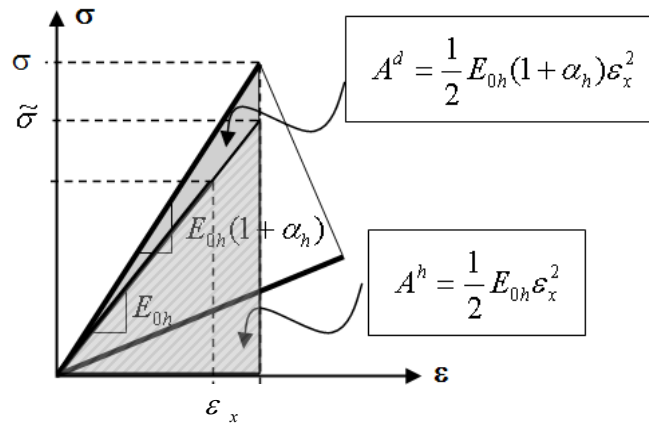


Figura 4.8 – Diagrama tensão-deformação para o material na fase de ganho de rigidez.

Substituindo-se as relações de (4.27) em (4.7) tem-se a função de remodelamento como função das variáveis primais:

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) &= E_{0h} \cdot \varepsilon_x (1 + \alpha_h) - \left( \sigma_0 - \frac{1}{2} E_{0h} (1 + \alpha_h) \cdot \varepsilon_x^2 + \frac{1}{2} E_{0h} \cdot \varepsilon_x^2 \right) \\ &= E_{0h} \cdot \varepsilon_x (1 + \alpha_h) - \left( \sigma_0 - \frac{1}{2} E_{0h} \cdot \varepsilon_x^2 \alpha_h \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Na Figura 4.9 ilustra-se a função de remodelamento da equação (4.29). Na fase de ganho de rigidez a função de remodelamento é influenciada pela variável interna  $\alpha_h$ .

A Figura 4.10 representa as curvas de nível da função de remodelamento na fase de ganho de rigidez do material, para uma condição de dano nulo, ou seja, só ocorre o ganho de rigidez.

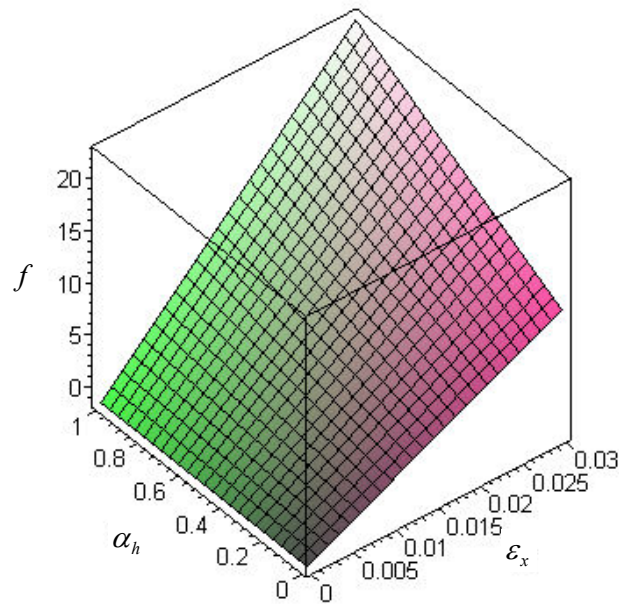


Figura 4.9 – Função de remodelamento em termos de  $\varepsilon_x$  e de  $\alpha_h$  para a fase de ganho de rigidez.

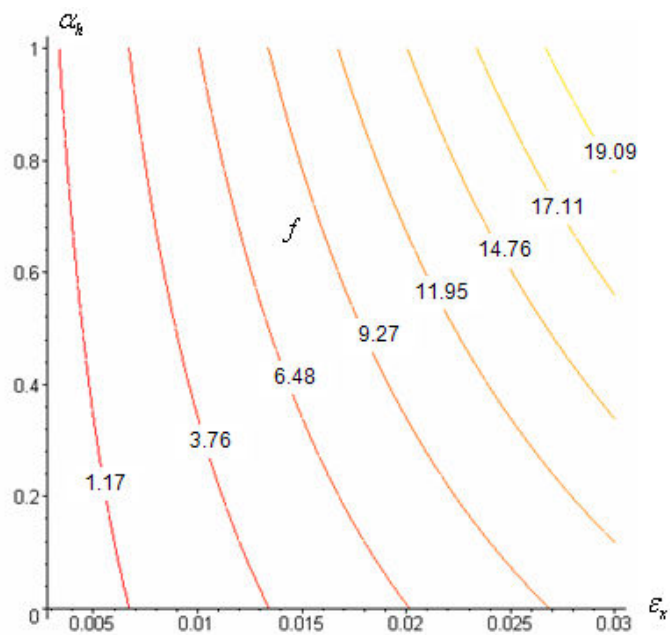


Figura 4.10 – Contornos da função de remodelamento para a fase de ganho de rigidez.

Observa-se que as curvas da Figura 4.10 vão se tornando cada vez mais próximas no sentido do aumento da deformação ( $\varepsilon_x$ ) e os valores de  $f(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h)$

ficam maiores nesse sentido, o que leva, da mesma forma que ocorria na fase de dano do material, a uma maior dificuldade para a satisfação da condição  $f(\varepsilon_x, \alpha_d, \alpha_h) \leq 0$ .

A Figura 4.11 mostra o diagrama de tensão–força termodinâmica para o material, com a indicação da região das forças termodinâmicas admissíveis e também o subdiferencial da função indicatriz da região  $P_A$ .

A região admissível  $P_A$  é a projeção da região admissível  $P$  no espaço das forças termodinâmicas. Para a formulação proposta a região de interesse é  $P_A$  porque no campo das tensões não há dissipação de energia.

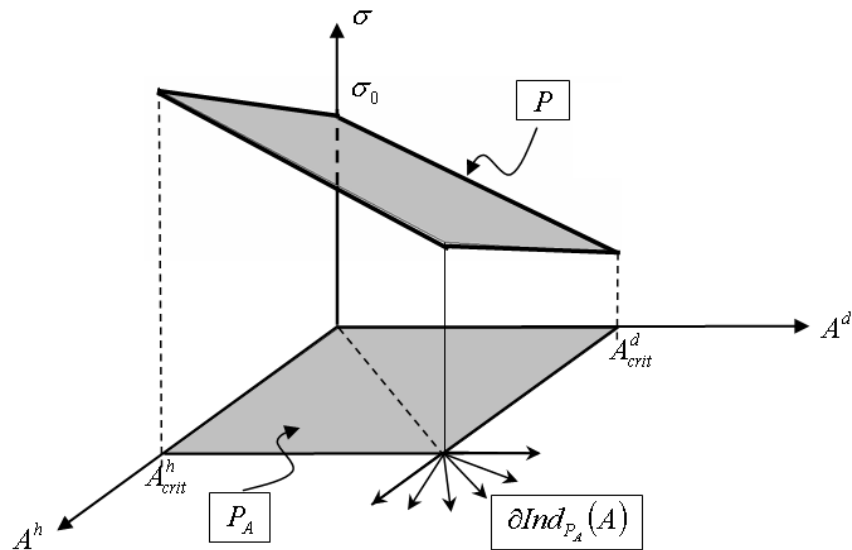


Figura 4.11 – Diagrama tensão–força termodinâmica com a indicação das regiões termodinamicamente admissíveis para o problema.

Não é objetivo desse exemplo o desenvolvimento da solução numérica, por isso não foram definidos os dados referentes à geometria da barra e à aplicação do carregamento.

#### 4.3 EXEMPLO UNIDIMENSIONAL DE BARRA QUE REPRESENTA UMA AMOSTRA DE OSSO

O exemplo proposto é o de uma barra (simulando uma amostra de ensaio), composta por dois elementos unidimensionais, sujeita a um carregamento que



estabelece o remodelamento ósseo, conforme a Figura 4.13.

Para se obter a solução numérica do problema foi utilizado o programa REMOLD 1D (ver item 6), que emprega, para a solução do equilíbrio global, o Método Quase-Newton e para a determinação dos incrementos das variáveis internas, por meio dos algoritmos da programação matemática, o Método de Newton-Raphson.

A função de remodelamento utilizada para o exemplo unidimensional tem a seguinte forma:

$$f(\sigma, A^d, A^h) = \sigma + (A^d - A_0^d) + (A^h - A_0^h) \leq 0 \quad (4.30)$$

e é uma adaptação do critério de Drucker-Prager, como indicado na equação (5.28).

Foram realizadas duas considerações: (1ª) os dois elementos que compõem a barra foram considerados íntegros inicialmente e; (2ª) foi estabelecido um dano inicial em um dos elementos.

Os resultados obtidos para essas simulações foram comparados aos descritos por Kopperdahl e Keaveny (1998), definidos no item 2.3.3 deste trabalho.

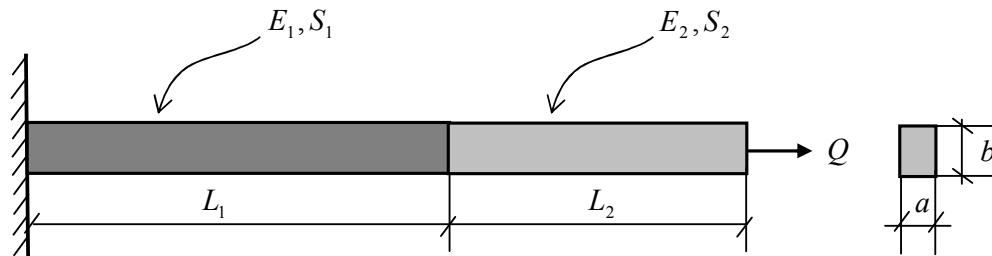


Figura 4.12 – Trabécula óssea composta por dois elementos.

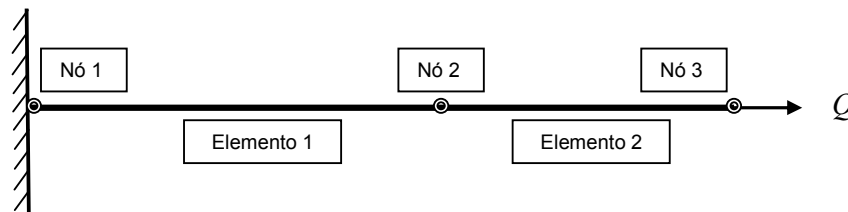


Figura 4.13 – Definição de elementos e nós do modelo unidimensional.

Para o processamento duas considerações definidas (sem dano inicial e com dano inicial) foram adotados os dados da Tabela 4.1 e a numeração definida para os nós e elementos do modelo está ilustrada na Figura 4.13 .

Os pontos de Gauss considerados para o modelo unidimensional coincidem com os nós do modelo.

Embora as propriedades tenham sido consideradas iguais para os dois elementos, na Tabela 4.1 os dados do material e da geometria da barra estão separados por elemento.

Tabela 4.1 – Dados utilizados no exemplo

DADOS	ELEMENTO 1	ELEMENTO 2
Comprimento $L$ (m)	0,015	0,015
Altura $b$ (m)	0,01	0,01
Espessura $a$ (m)	0,01	0,01
Módulo de Young $E_0$ (MPa)	450	450
Valor máximo de $\alpha_d$	0,67	0,67
Valor máximo de $\alpha_h$	1,0	1,0
Força termodinâmica $A_0^d$ (Pa)	969,61	969,61
Força termodinâmica $A_0^h$ (Pa)	10000	10000

A carga total aplicada na barra foi de 350 N, dividida em incrementos iguais para cada passo de carga.

a) Consideração do material inicialmente íntegro nos dois elementos

Para a obtenção dos resultados apresentados na seqüência, foram processados 1200 passos de carga no programa REMOLD 1D.

A Figura 4.14 ilustra os diagramas tensão-deformação para os dois elementos, considerados inicialmente íntegros (sem dano inicial).

Observa-se que o resultado obtido com o uso da formulação proposta ficou muito próximo do obtido por Kopperdahl e Keaveny (1998) nos trechos linear inicial e de perda de rigidez.

Para deformações acima de 2%, aproximadamente, observa-se a fase de

ganho de rigidez, para a qual não se tem resultados experimentais que permitem reproduzir precisamente esse fenômeno. Por isso, foram adotados alguns parâmetros (como o valores máximos das variáveis internas), que precisam ser aferidos de acordo com os resultados experimentais no que diz respeito a formação óssea.

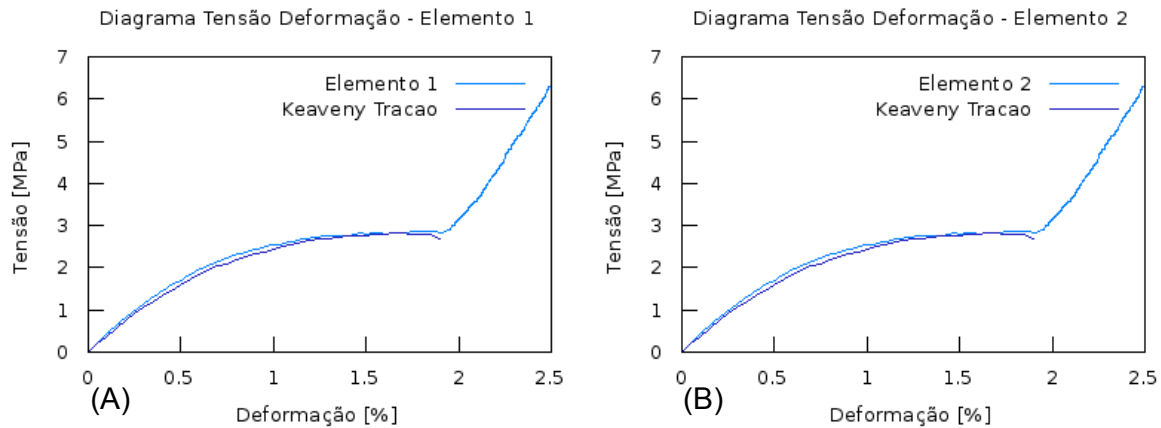


Figura 4.14 – Resultados dos diagramas tensão-deformação para o elemento 1 (A) e para o elemento 2 (B).

A evolução das variáveis internas escalares de remodelamento ósseo ( $\alpha_d$ ) e ( $\alpha_h$ ) pode ser verificada na Figura 4.15, em relação aos passos de carga. Por conveniência, foram mostrados os resultados até 1000 passos de carga.

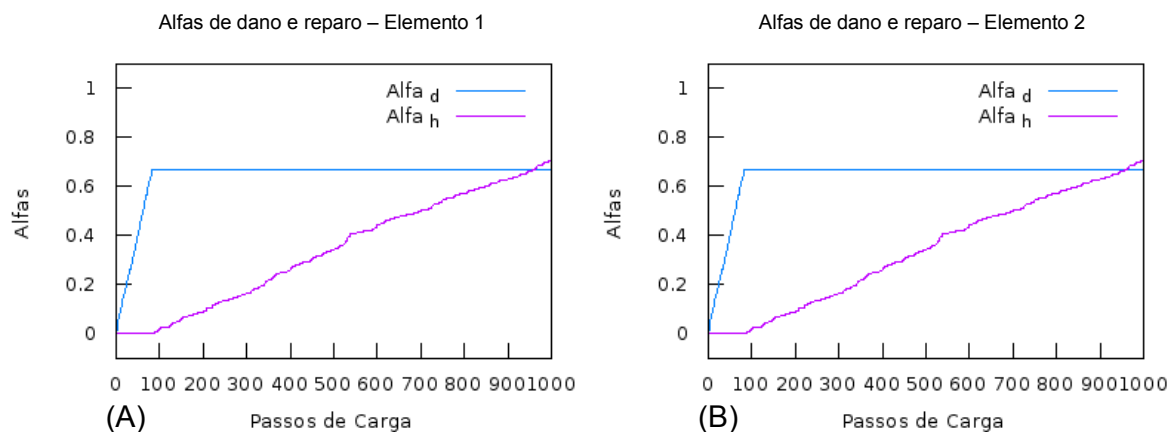


Figura 4.15 – Evolução das variáveis internas ( $\alpha_d$ ) e ( $\alpha_h$ ) para o elemento 1 (A) e para o elemento 2 (B) ao longo dos passos de carga.

Observa-se que quando a variável de perda de rigidez ( $\alpha_d$ ) atinge um valor máximo estabelecido na formulação, no caso 0,67, o dano se mantém e inicia-se o processo de ganho de rigidez, a partir do material danificado.

Para um passo de carga próximo de 1000, o valor da variável de ganho de rigidez ( $\alpha_h$ ) supera o da variável de perda de rigidez, mas isso não representa que o material voltou a ter o Módulo de Young inicial. (como ilustra a Figura 4.16).

Na Figura 4.16 pode-se observar a variação do Módulo de Young com relação aos passos de carga. Com os parâmetros estabelecidos no modelo, a perda de rigidez ocorre até o passo 100, aproximadamente, quando tem início o processo de ganho de rigidez, que ocorre de forma menos acentuada.

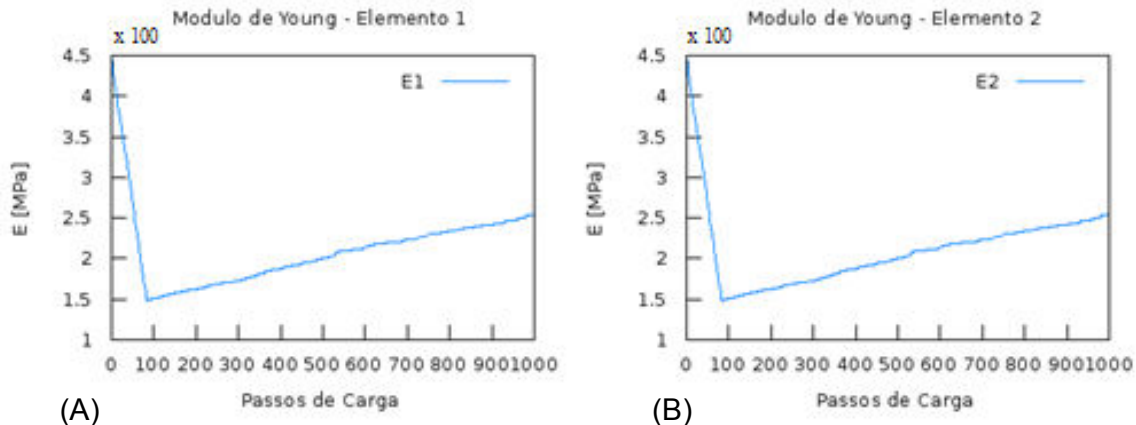


Figura 4.16 – Evolução do Módulo de Young para o elemento 1 (A) e para o elemento 2 (B) ao longo dos passos de carga.

O controle de como os fenômenos de perda e de ganho de rigidez ocorrem no material, principalmente da evolução estabelecida para cada fase do remodelamento, é imposto pelos parâmetros do modelo no programa REMOLD 1D.

#### b) Consideração do material do elemento 2 danificado inicialmente

O objetivo dessa consideração é mostrar que é possível fazer alterações nas propriedades de cada elemento separadamente, simulando os efeitos de partes de ossos em fases distintas de remodelamento.

Foram utilizados os mesmos parâmetros definidos para a consideração

anterior, mas foi estabelecido um valor inicial de 0,1 para a variável de perda de rigidez do elemento 2. Foram processados 1200 passos de carga para o exemplo.

Os resultados obtidos para o diagrama tensão-deformação estão ilustrados na Figura 4.17.

Para o elemento 2 pode-se observar uma pequena diferença no diagrama, em comparação com os resultados de Kopperdahl e Keaveny (1998). Essa diferença se deve à imposição do dano inicial e é pequena porque foi imposto um dano inicial pequeno também.

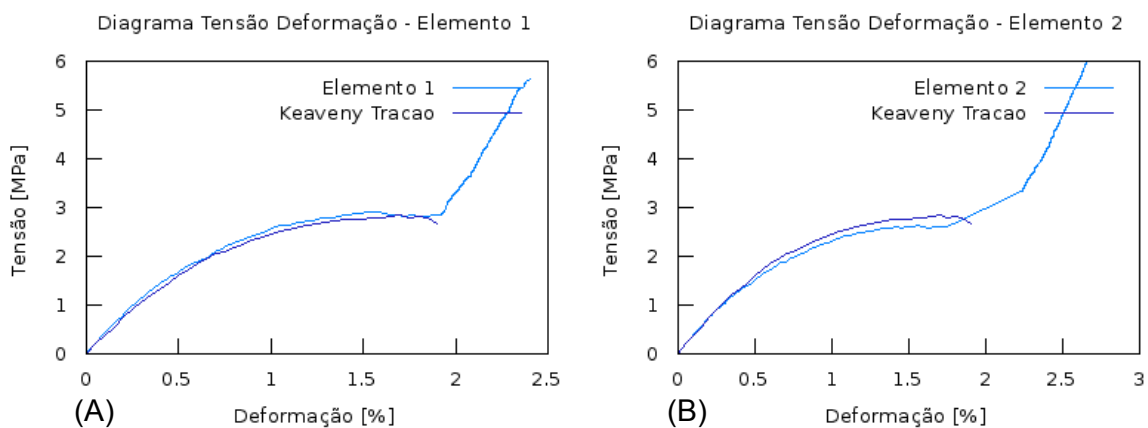


Figura 4.17 – Resultados dos diagramas tensão-deformação para o elemento 1 (A) e para o elemento 2 (B) – dano inicial.

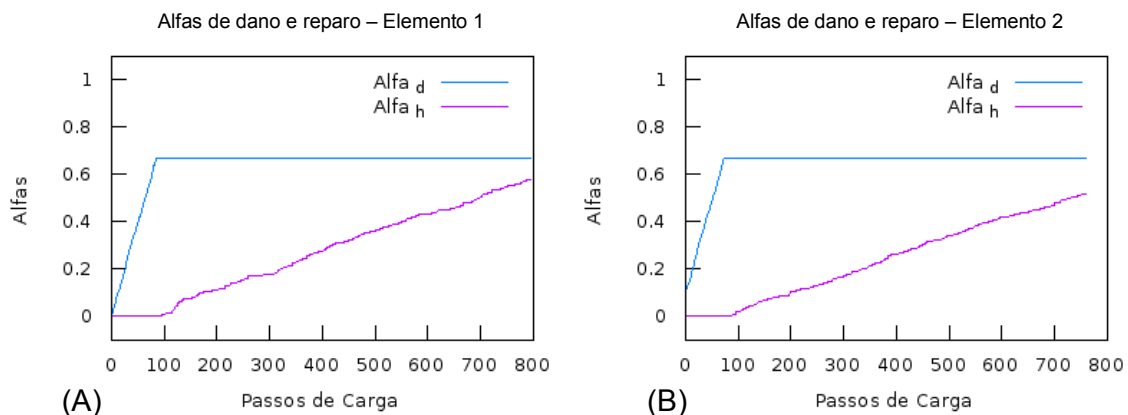


Figura 4.18 – Evolução das variáveis internas ( $\alpha_d$ ) e ( $\alpha_h$ ) para o elemento 1 (A) e para o elemento 2 (B) ao longo dos passos de carga – dano inicial.

O trecho de ganho de rigidez também mostra-se diferente se comparado ao do elemento 1 e inicia-se para uma deformação mais baixa (entre 1,5% e 2%) no elemento 2, como era esperado (já que o processo de danificação teve início antes no material do elemento 2 do que no do elemento 1).

Na Figura 4.18 (B) pode-se verificar que a variável  $\alpha_d$  inicia em 0,1 e que no passo de carga 800 aparece uma defasagem maior entre o valor máximo de  $\alpha_d$  e o valor que a variável de perda de rigidez ( $\alpha_h$ ) assume.

O Módulo de Young do material 2 inicia com valor menor do que o do elementos 1 e, na seqüência, diminui na fase de perda de rigidez (até um passo de carga próximo de 100) e volta a recuperar seu valor na fase de ganho de rigidez, conforme mostra a Figura 4.19.

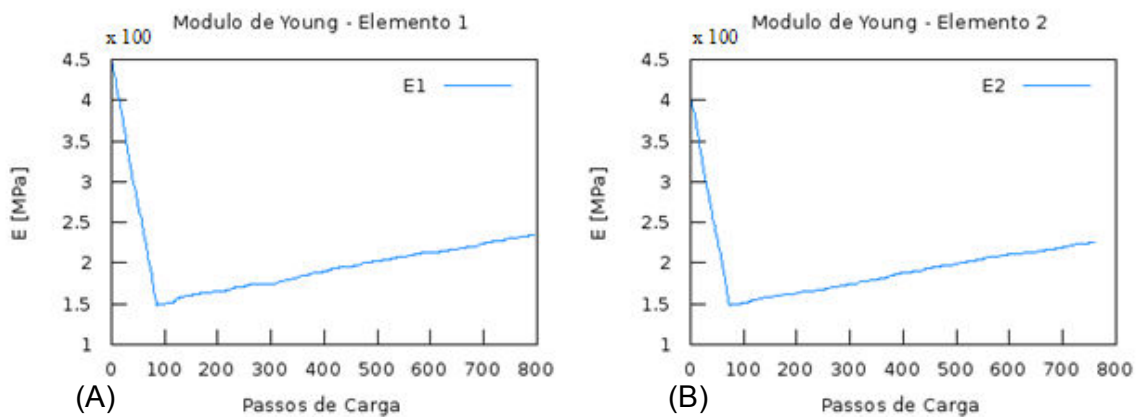


Figura 4.19 – Evolução do Módulo de Young para o elemento 1 (A) e para o elemento 2 (B) ao longo dos passos de carga – dano inicial.

Várias outras simulações de comportamento dos ossos podem ser realizadas além dessas apresentadas neste trabalho. O objetivo dessas simulações é ilustrar a aplicação do programa REMOLD 1D, comparando-se os resultados obtidos computacionalmente com aqueles estabelecidos pelos ensaios de laboratório.

Estudos futuros voltados para a análise das variáveis internas, devem ser realizados para se obterem experimentalmente, os parâmetros que permitem a simulação completa do remodelamento ósseo, incluindo os efeitos biológicos no

modelo.

A variação da densidade óssea efetiva não foi observada nos resultados devido à relação entre densidade e Módulo de Young, bastando para o acompanhamento do remodelamento a observação de um dos parâmetros apenas.

Como não se conhece a relação entre a densidade e as variáveis internas optou-se por analisar o Módulo de Young.

## 5 FORMULAÇÃO PROPOSTA PARA O CASO BIDIMENSIONAL

Apresenta-se para o caso bidimensional uma análise que tem início com a generalização da influência das variáveis internas de ganho e perda de rigidez, seguindo com a particularização do problema no desenvolvimento de uma aplicação.

Para o caso bidimensional é apresentada uma formulação que pode ser utilizada tanto para o estado plano de tensões quanto para o estado plano de deformações.

Contrafatto e Cuomo (2006) apresentam uma proposta de separação das variáveis de dano para tração e para a compressão, aplicadas ao comportamento do concreto. Uma adaptação dessa proposta será apresentada para o material ósseo, com a separação do comportamento das variáveis internas de perda e ganho de rigidez na tração e na compressão.

A definição de uma função de remodelamento adequada é fundamental para que o comportamento dos ossos seja reproduzido com o máximo de precisão, com base nos resultados de ensaios de laboratório (KOPPERDAHL e KEAVENY (1998), HSIEH e TURNER (2001), BAYRAKTAR et al. (2004), ZYSSET e RINCÓN-KOHLI (2006), YANG et al. (2006) e RINCÓN-KOHLI e ZYSSET (2008)).

No presente trabalho serão apresentadas algumas funções de remodelamento para problemas bidimensionais que, conforme o conhecimento de parâmetros do material, poderão ser adotadas na formulação.

### 5.1 FORMULAÇÃO BIDIMENSIONAL COM VARIÁVEIS INTERNAS ESCALARES DE PERDA E GANHO DE RIGIDEZ

Para o caso bidimensional, a formulação apresentada no item 3 pode ser desenvolvida considerando-se que o tensor elástico, para o estado plano de tensão ou de deformação, é dado por:

$$\mathbf{ID}(\alpha_d, \alpha_h) = \mathbf{ID}_0 (1 - \alpha_d)^{n_d} (1 + \alpha_h)^{n_h} \quad (5.1)$$

que pode ser escrito em função das constantes de Lamé, definidas por:

$$G(\alpha_d, \alpha_h) = G_0 (1 - \alpha_d)^{n_d} (1 + \alpha_h)^{n_h} \quad (5.2)$$



$$\lambda(\alpha_d, \alpha_h) = \lambda_0 (1 - \alpha_d)^{n_d} (1 + \alpha_h)^{n_h} \quad (5.3)$$

$$G_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu)} \quad \text{e} \quad \lambda_0 = \frac{\nu E_0}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5.4)$$

onde  $G_0$  e  $\lambda_0$  são as constantes de Lamé para o material íntegro e  $E_0$  e  $\nu$  são o Módulo de Young do material íntegro e o coeficiente de Poisson (considerado constante durante o processo de remodelação óssea), respectivamente.

Inicialmente adota-se a não diferenciação das variáveis internas de dano e de reparo para os casos de tração e de compressão. Esta condição de separação dos fenômenos na tração e na compressão será analisada no item 5.2.

As equações da Energia Livre de Helmholtz, e das tensões generalizadas, conforme apresentadas na Tabela 3.1, podem ser reescritas de acordo com as equações (5.5) a (5.8).

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h) = \frac{1}{2\rho(\alpha_d, \alpha_h)} [2G \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon}] \quad (5.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h) = \rho(\alpha_d, \alpha_h) \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = [2G \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}] \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} A^d(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h) &= -\rho(\alpha_d, \alpha_h) \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h)}{\partial \alpha_d} \\ &= -\frac{1}{2} \left[ 2 \frac{\partial G}{\partial \alpha_d} \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_d} \operatorname{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \frac{\partial \rho(\alpha_d, \alpha_h)}{\partial \alpha_d} (2G \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon}) \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} A^h(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h) &= \rho(\alpha_d, \alpha_h) \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h)}{\partial \alpha_h} \\ &= \frac{1}{2} \left[ 2 \frac{\partial G}{\partial \alpha_h} \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_h} \operatorname{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\rho(\alpha_d, \alpha_h)} \frac{\partial \rho(\alpha_d, \alpha_h)}{\partial \alpha_h} (2G \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon}) \right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

considerando-se:  $(\boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon})$  o produto interno do tensor de deformações e  $(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon})$  o traço do tensor de deformações.

Para a definição do potencial de dissipação ( $j_c$ ) é preciso estabelecer o potencial termodinâmico complementar do problema bidimensional (densidade de energia livre de Gibbs), em função das variáveis duais.

Dessa forma, substituindo-se a equação (5.5) na equação (3.7), tem-se para o potencial complementar:

$$\psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h) = \sup_{\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h} [\boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} - A^d \bullet \alpha_d + A^h \bullet \alpha_h - \frac{1}{2}(2G \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon})] \quad (5.9)$$

Por uma questão de simplificação de notação, o módulo elástico será definido de acordo com a equação (5.10), na qual não são consideradas as constantes de Lamé, e os expoentes  $n_d$  e  $n_h$  da equação (5.1) são considerados iguais a 1, determinando uma influência linear para os parâmetros de perda e ganho de rigidez da formulação bidimensional. Assim:

$$\mathbf{ID} = \mathbf{ID}_0(1 - \alpha_d)(1 + \alpha_h) \quad (5.10)$$

com  $\mathbf{ID}_0$  sendo o tensor elástico de quarta ordem para o material íntegro.

O potencial termodinâmico definido na equação (3.3) passa a ser escrito como:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h) = \frac{1}{2\rho} \mathbf{ID}_0((1 - \alpha_d)(1 + \alpha_h)) \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.11)$$

e o potencial complementar fica definido por:

$$\psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h) = \sup_{\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h} [\boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} - A^d \bullet \alpha_d + A^h \bullet \alpha_h - \frac{1}{2}(\mathbf{ID}_0(1 - \alpha_d)(1 + \alpha_h)) \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon}] \quad (5.12)$$

ou, em função das variáveis duais:

$$\psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h) = \sup_{\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d, \alpha_h} \left[ \frac{3}{\sqrt[3]{2}} (A^d)^{\frac{1}{3}} (A^h)^{\frac{1}{3}} (\boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{ID}_0^{-1} \boldsymbol{\sigma})^{\frac{1}{3}} - A^d - A^h \right] \quad (5.13)$$

Para o caso bidimensional, a equação (5.14) define o potencial de dissipação em incrementos, considerando-se que a densidade não depende das variáveis internas escalares:

$$\begin{aligned} j_c(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta A^d, \Delta A^h) &= \psi_c(\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}, A^d + \Delta A^d, A^h + \Delta A^h) - \Delta \boldsymbol{\sigma} \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} \psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h) \\ &\quad - \Delta A^d \nabla_{A^d} \psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h) - \Delta A^h \nabla_{A^h} \psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h) - \psi_c(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Substituindo a equação (5.13) na equação (5.14) tem-se:

$$\begin{aligned}
 j_c(\Delta\sigma, \Delta A^d, \Delta A^h) = & \left( \frac{3}{\sqrt[3]{2}} (A^d + \Delta A^d)^{\frac{1}{3}} (A^h + \Delta A^h)^{\frac{1}{3}} \left( (\sigma + \Delta\sigma) \bullet \mathbf{ID}_0^{-1}(\sigma + \Delta\sigma) \right)^{\frac{1}{3}} \right. \\
 & \left. - (A^d + \Delta A^d) - (A^h + \Delta A^h) \right) - \Delta\sigma \left( \frac{2}{\sqrt[3]{2}} (\sigma \bullet \mathbf{ID}_0^{-2}\sigma)^{\frac{1}{6}} (A^d)^{\frac{1}{3}} (A^h)^{\frac{1}{3}} \right) \\
 & - \Delta A^d \left( \frac{1}{\sqrt[3]{2}} (\sigma \bullet \mathbf{ID}_0^{-1}\sigma)^{\frac{1}{3}} (A^d)^{\frac{2}{3}} (A^h)^{\frac{1}{3}} - 1 \right) - \Delta A^h \left( \frac{1}{\sqrt[3]{2}} (\sigma \bullet \mathbf{ID}_0^{-1}\sigma)^{\frac{1}{3}} (A^d)^{\frac{1}{3}} (A^h)^{\frac{2}{3}} - 1 \right) \\
 & - \left( \frac{3}{\sqrt[3]{2}} (\sigma \bullet \mathbf{ID}_0^{-1}\sigma)^{\frac{1}{3}} (A^d)^{\frac{1}{3}} (A^h)^{\frac{1}{3}} - A^d - A^h \right)
 \end{aligned} \quad (5.15)$$

que é a equação do potencial de dissipação complementar, em termos incrementais.

Os incrementos das variáveis internas de perda e ganho de rigidez são determinados por:

$$\begin{aligned}
 \Delta\alpha_d &= \nabla_{\Delta A^d} j_c(\Delta\sigma, \Delta A^d, \Delta A^h) \\
 \Delta\alpha_h &= \nabla_{\Delta A^h} j_c(\Delta\sigma, \Delta A^d, \Delta A^h)
 \end{aligned} \quad (5.16)$$

que, para o caso bidimensional podem ser:

$$\begin{aligned}
 \Delta\alpha_d &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left( \left( (\sigma + \Delta\sigma) \bullet \mathbf{ID}_0^{-1}(\sigma + \Delta\sigma) \right)^{\frac{1}{3}} (A^d + \Delta A^d)^{\frac{2}{3}} (A^h + \Delta A^h)^{\frac{1}{3}} \right. \\
 & \quad \left. - (\sigma \bullet \mathbf{ID}_0^{-1}\sigma)^{\frac{1}{3}} (A^d)^{\frac{2}{3}} (A^h)^{\frac{1}{3}} \right) \\
 \Delta\alpha_h &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left( \left( (\sigma + \Delta\sigma) \bullet \mathbf{ID}_0^{-1}(\sigma + \Delta\sigma) \right)^{\frac{1}{3}} (A^d + \Delta A^d)^{\frac{1}{3}} (A^h + \Delta A^h)^{\frac{2}{3}} \right. \\
 & \quad \left. - (\sigma \bullet \mathbf{ID}_0^{-1}\sigma)^{\frac{1}{3}} (A^d)^{\frac{1}{3}} (A^h)^{\frac{2}{3}} \right)
 \end{aligned} \quad (5.17)$$

A função de remodelamento para problemas bidimensionais é definida em função das variáveis duais e é definida com base nos critérios de falha usualmente utilizados, com o acoplamento dos efeitos de perda e ganho de rigidez.

Existem diferentes critérios de ruptura dos materiais, que podem ser definidos como leis que estabelecem uma relação entre o estado multiaxial de tensão de um corpo com os resultados obtidos de ensaios mais simples, como o de tração e o de compressão, entre outros, em corpos de prova no laboratório.

Esses critérios definem uma superfície de falha, estabelecida pela função de “escoamento”, que permite avaliar para um dado estado de tensão a possibilidade de falha.

Deve-se escolher o critério mais adequado ao tipo de material (elasto-plástico, granular, frágil ou parcialmente frágil) envolvido no problema e deve-se levar em consideração quais os parâmetros exigidos por um determinado critério pois, se os resultados dos ensaios de laboratório não são suficientes para se definir um determinado parâmetro, o critério torna-se inviável.

Para os materiais biológicos mineralizados (como o tecido ósseo e a dentina) devem ser adotados critérios que levem em consideração os mecanismos de rearranjo celular do comportamento parcialmente frágil. Além disso sugere-se critérios não-lineares, que considerem as tensões principais e ainda, que sejam utilizados critérios distintos na tração e na compressão.

Dessa forma, serão propostas a seguir funções de remodelamento, adaptadas com base nos critérios de falha de Von Mises, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, Ottosen e Tsai-Wu.

#### 5.1.1 Função de remodelamento adaptada para o critério de Von Mises

O critério de Von Mises, também conhecido como critério da máxima energia de distorção, é um critério indicado para materiais dúcteis. A sua consideração nesse contexto, mesmo sabendo-se que o osso não é um material dúctil, se deve ao fato do mesmo ser bastante utilizado na literatura, por causa da sua disponibilidade em softwares comerciais de análise numérica que utiliza entre outros o Método dos Elementos Finitos.

O critério de Von Mises é definido usualmente em função dos invariantes de tensão como:

$$f(J_2) = \sqrt{3J_2} - \sigma_y = 0 \quad (5.18)$$

considerando que  $J_2$  é o segundo invariante do tensor desviador de tensões e  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento do material.

Contrafatto e Cuomo (2002) apresentam uma função de escoamento que considera a associação de plasticidade, endurecimento e dano. Com base nessa função de escoamento propõe-se, neste trabalho, a função de remodelamento da

equação (5.19):

$$f(\sigma, A^d, A^h) = f(J_2, A^d, A^h) = \sqrt{3J_2} - (\sigma_0 - A^d + A^h) \leq 0 \quad (5.19)$$

para a qual  $\sigma_0$  é a tensão que referencia o início do remodelamento ósseo.

### 5.1.2 Função de remodelamento adaptada para o critério de Mohr-Coulomb

O critério de Mohr-Coulomb é um critério que associa o critério de Mohr, com a equação que determina a linha da envoltória de Coulomb, conhecida como equação de Coulomb (CHEN, 2007).

A envoltória proporciona uma boa aproximação para a determinação da falha de materiais frágil-dúteis, por isso tem-se grande interesse na aplicação desse critério para os materiais biológicos, sobretudo para os ossos.

Em geral, o critério de Mohr é um critério de dois parâmetros que, observados experimentalmente, servem para caracterizar completamente o material.

O critério de Mohr-Coulomb, escrito em função dos invariantes de tensão, é definido da seguinte forma:

$$f(I_1, J_2, \theta) = \sqrt{J_2} - \left( \frac{c}{\tan \phi} + \frac{I_1}{3} \right) g(\theta) = 0 \quad (5.20)$$

$$g(\theta) = \frac{\sin \phi}{\cos \theta + \frac{(\sin \theta \cdot \sin \phi)}{\sqrt{3}}} \quad (5.21)$$

$$\theta = \arctg \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \right] \quad (5.22)$$

para a qual,  $J_2$  é o segundo invariante do tensor desviador de tensões,  $I_1$  é o primeiro invariante do tensor de tensões,  $c$  e  $\phi$  são, respectivamente, coesão e ângulo de atrito interno (parâmetros do material obtidos experimentalmente) e  $\theta$  é identificado como ângulo de Lode.

As tensões  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  da equação (5.22) são as tensões principais.

A função de remodelamento proposta para considerar os efeitos de perda e ganho de rigidez, com base no que foi definido por Contrafatto e Cuomo (2002), é:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h) = f(I_1, J_2, \theta, A^d, A^h) = \sqrt{3J_2} - \frac{I_1}{3} g(\theta) - (\sigma_0 - A^d + A^h) \leq 0 \quad (5.23)$$

sendo  $\sigma_0$  a tensão que referencia o início do remodelamento ósseo.

### 5.1.3 Função de remodelamento adaptada para o critério de Drucker-Prager

Segundo Chen (2007), o critério de Drucker-Prager pode ser considerado uma suavização do critério de Mohr-Coulomb, ou ainda, uma extensão do critério de Von Mises, para materiais como solo e concreto.

O critério de Drucker-Prager é um critério de dois parâmetros e sua formulação mais usual é:

$$f(I_1, J_2) = \sqrt{J_2} - \mu I_1 - \kappa = 0 \quad (5.24)$$

onde  $J_2$  é o segundo invariante do tensor desviador de tensões,  $I_1$  é o primeiro invariante do tensor de tensões e  $\mu$  e  $\kappa$  são parâmetros do material.

Alternativamente, pode-se escrever o critério de Drucker-Prager como uma simplificação de critério de Mohr-Coulomb, como mostrado na equação (5.25).

$$f(I_1, J_2) = \sqrt{J_2} - \left( \frac{c}{\tan \phi} + \frac{I_1}{3} \right) M = 0 \quad (5.25)$$

A determinação da constante  $M$  é feita igualando-se a função  $g(\theta)$  (definida na equação (5.20)) para diferentes valores do ângulo de Lode.

Novamente, a função de remodelamento proposta é:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h) = f(I_1, J_2, A^d, A^h) = \sqrt{3J_2} + \frac{\beta}{3} I_1 - k \leq 0 \quad (5.26)$$

considerando-se:

$$\begin{aligned} \beta &= f(r) \\ r &= \frac{|\sigma_c|}{\sigma_T} \\ k &= (\sigma_0 - A^d + A^h) \end{aligned} \quad (5.27)$$

onde  $r$  é a relação entre  $\sigma_c$  e  $\sigma_T$ , que são as resistências à tração e à compressão do materiais, a função  $f(r)$  é definida em Contrafatto e Cuomo (2002) e  $\sigma_0$  é a

tensão que referencia o início do remodelamento.

Uma outra proposta para a formulação da função de escoamento baseada no critério de Drucker-Prager é definida em Contrafatto e Cuomo (2006). A proposta é estabelecer a parcela  $k$  como função, apenas, das forças termodinâmicas. Para o remodelamento ósseo tem-se:

$$f(\sigma, A^d, A^h) = f(I_1, J_2, A^d, A^h) = \mu\sqrt{J_2} + \beta I_1 + (A^d - A_0^d) + (A^h - A_0^h) \leq 0 \quad (5.28)$$

onde  $A_0^d$  e  $A_0^h$ , são as forças termodinâmicas iniciais de dano (perda de rigidez) e de healing (ganho de rigidez).

#### 5.1.4 Função de remodelamento adaptada para o critério de Ottosen

O critério de Ottosen, é um critério de quatro parâmetros indicado para materiais frágeis, que possuem bom comportamento principalmente à compressão, como o concreto (CHEN, 2007).

Esse critério, apresentado na equação (5.29), pode ser adotado para o osso na compressão, desde que se tenha um outro critério, que pode ser escolhido entre os descritos anteriormente, para descrever o comportamento à tração.

$$f(I_1, J_2, \cos 3\theta) = b_1 \frac{I_1}{\sigma_c} + b_2 \frac{J_2}{\sigma_c^2} + b_3 \frac{\sqrt{J_2}}{\sigma_c} - 1 = 0 \quad (5.29)$$

$$b_3 = \begin{cases} c_1 \cdot \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos(c_2 \cdot \cos 3\theta) \right] & \text{se } \cos 3\theta \geq 0 \\ c_1 \cdot \cos \left[ \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos(-c_2 \cdot \cos 3\theta) \right] & \text{se } \cos 3\theta \leq 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

considerando-se que  $\sigma_c > 0$  é a resistência do material à compressão.

Os parâmetros do material, têm uma relação dependente de  $r$ , que para o concreto, está definida conforme (5.31).

$$r = \frac{\sigma_T}{|\sigma_c|} \quad b_1 = \frac{1}{3,7r^{1,1}} \quad b_2 = \frac{1}{9r^{1,4}} \quad c_1 = \frac{1}{0,7r^{0,9}} \quad c_2 = 1 - 6,8(r - 0,07)^2 \quad (5.31)$$

Uma função de remodelamento proposta como uma adaptação do que foi estabelecido por Contrafatto e Cuomo (2006) para o escoamento é dada por:

$$f(\sigma, A^d, A^h) = f(I_1, J_2, \cos 3\theta, A_c^d, A_c^h) = b_1 I_1 + b_2 \frac{J_2}{\sigma_C^*} + b_3 \sqrt{J_2} - \sigma_C^* \leq 0 \quad (5.32)$$

com:

$$\sigma_C^* = \sigma_C - A_c^d + A_c^h \quad (5.33)$$

considerando-se  $\sigma_C$  a resistência à compressão do osso relacionada ao início do remodelamento e  $A_c^d$  e  $A_c^h$  as forças termodinâmicas de perda e ganho de rigidez, respectivamente, na compressão.

#### 5.1.5 Função de remodelamento adaptada para o critério de Tsai-Wu

O critério de Tsai-Wu é um critério de falha quadrático, bastante utilizado para o caso de tensões multiaxiais. Keaveny et al. (1999) aplicam esse critério para analisar ossos bovinos.

Para o problema bidimensional, o critério de Tsai-Wu necessita de cinco parâmetros do material, e no caso dos ossos, que têm comportamento diferenciado à tração e à compressão, em cada direção, é o critério mais indicado para levar em consideração essas diferenças.

Pode-se escrever o critério bidimensional como:

$$f(\sigma) = F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1 \quad (5.34)$$

com  $F_{ii}$  e  $F_i$  sendo tensores de resistência de quarta e de segunda ordem respectivamente. Observa-se que a notação utilizada para as tensões tem a seguinte equivalência:  $\sigma_1 \equiv \sigma_{11}$ ,  $\sigma_2 \equiv \sigma_{22}$ ,  $\sigma_6 \equiv \sigma_{12}$ .

De acordo com Van Paepegem e Degrieck (2003), o termo  $F_{12}$  pode ser negligenciado sem comprometimento dos resultados. Dessa forma, considerando para os termos  $F_{ii}$  e  $F_i$  relações de tensões relacionadas ao remodelamento, como descrito na sequência, pode-se reescrever o critério definido na equação (5.34) da seguinte forma:

$$\frac{1}{X_T \cdot |X_C|} \sigma_{11}^2 + \frac{1}{Y_T \cdot |Y_C|} \sigma_{22}^2 + \frac{1}{S^2} \sigma_{12}^2 + \left( \frac{1}{X_T} - \frac{1}{|X_C|} \right) \sigma_{11} + \left( \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{|Y_C|} \right) \sigma_{22} = 1 \quad (5.35)$$



onde  $X_T$  e  $X_C$  são as tensões de tração e compressão no início do remodelamento, para a direção longitudinal do material,  $Y_T$  e  $Y_C$  são as tensões de tração e compressão no início do remodelamento, para a direção transversal do material e  $S$  é a tensão de cisalhamento no início do remodelamento.

A proposta para a função de remodelamento em termos das variáveis primais, adaptada da equação (5.35), que contempla os fenômenos de perda e ganho de rigidez é descrita na equação (5.36).

$$\begin{aligned}
 f(\sigma, \alpha_d, \alpha_h) = & \frac{1}{X_T \cdot |X_C|} \left( \frac{\sigma_{11}}{(1 - \alpha_d)^{n_d} (1 + \alpha_h)^{n_h}} \right)^2 + \frac{1}{Y_T \cdot |Y_C|} \left( \frac{\sigma_{22}}{(1 - \alpha_d)^{n_d} (1 + \alpha_h)^{n_h}} \right)^2 \\
 & + \frac{1}{S^2} \left( \frac{\sigma_{12}}{(1 - \alpha_d)^{n_d} (1 + \alpha_h)^{n_h}} \right)^2 + \left( \frac{1}{X_T} - \frac{1}{|X_C|} \right) \left( \frac{\sigma_{11}}{(1 - \alpha_d)^{n_d} (1 + \alpha_h)^{n_h}} \right) \\
 & + \left( \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{|Y_C|} \right) \left( \frac{\sigma_{22}}{(1 - \alpha_d)^{n_d} (1 + \alpha_h)^{n_h}} \right) - 1 \leq 0
 \end{aligned} \quad (5.36)$$

Ainda, em termos das variáveis duais (forças termodinâmicas e tensões) a seguinte formulação é proposta para o critério de Tsai-Wu:

$$\begin{aligned}
 f = f(\sigma, X_T, X_C, Y_T, Y_C, S, A_c^d, A_c^h, A_t^d, A_t^h) \\
 f = \frac{1}{X_T^* \cdot |X_C^*|} \sigma_{11}^2 + \frac{1}{Y_T^* \cdot |Y_C^*|} \sigma_{22}^2 + \frac{1}{S^{*2}} \sigma_{12}^2 + \left( \frac{1}{X_T^*} - \frac{1}{|X_C^*|} \right) \sigma_{11} + \left( \frac{1}{Y_T^*} - \frac{1}{|Y_C^*|} \right) \sigma_{22} - 1 \leq 0
 \end{aligned} \quad (5.37)$$

considerando-se para as novas resistências diferenciadas pelo (\*):

$$\begin{aligned}
 X_C^* &= X_C - A_c^d + A_c^h \\
 X_T^* &= X_T - A_t^d + A_t^h \\
 Y_C^* &= Y_C - A_c^d + A_c^h \\
 Y_T^* &= Y_T - A_t^d + A_t^h \\
 S^* &= S - A^d + A^h
 \end{aligned} \quad (5.38)$$

com  $A_c^d$  e  $A_c^h$  representando as forças termodinâmicas de perda e de ganho de rigidez na compressão,  $A_t^d$  e  $A_t^h$  representando as forças termodinâmicas para a tração e as demais variáveis conforme já definido.

## 5.2 FORMULAÇÃO GERAL COM VARIÁVEIS INTERNAS ESCALARES PARA COMPORTAMENTO DIFERENCIADO NA TRAÇÃO E NA COMPRESSÃO

Observa-se nos dados obtidos a partir de ensaios de laboratório que o comportamento do osso à tração e à compressão é bastante distinto. O trabalho de Contrafatto e Cuomo (2006) traz uma formulação que diferencia o comportamento do concreto, sob um estado multiaxial de tensões, na tração e na compressão.

Para o caso bidimensional, apresenta-se a formulação do item 3 considerando a distinção das variáveis internas para o comportamento dos ossos na tração e na compressão.

Em virtude dessa distinção de comportamento, as constantes de Lamé, são agora definidas como:

$$G^+ = G^- = G(\alpha_{dt}, \alpha_{dc}, \alpha_{ht}, \alpha_{hc}) = G_0 (1 - \alpha_{dt})^{n_{dt}} (1 - \alpha_{dc})^{n_{dc}} (1 + \alpha_{ht})^{n_{ht}} (1 + \alpha_{hc})^{n_{hc}} \quad (5.39)$$

$$\lambda^+(\alpha_{dt}, \alpha_{dc}, \alpha_{ht}, \alpha_{hc}) = \left[ K_0 - \frac{2}{3} G_0 (1 - \alpha_{dc})^{n_{dc}} (1 + \alpha_{hc})^{n_{hc}} \right] (1 - \alpha_{dt})^{n_{dt}} (1 + \alpha_{ht})^{n_{ht}} \quad (5.40)$$

$$\lambda^-(\alpha_{dt}, \alpha_{dc}, \alpha_{ht}, \alpha_{hc}) = K_0 - \frac{2}{3} G_0 (1 - \alpha_{dc})^{n_{dc}} (1 + \alpha_{hc})^{n_{hc}} (1 - \alpha_{dt})^{2n_{dt}} (1 + \alpha_{ht})^{2n_{ht}}$$

$$K_0 = \frac{2G_0 + 3\lambda_0}{3} \quad (5.41)$$

onde  $G^+$  e  $\lambda^+$  são as constantes de Lamé para o material na tração,  $G^-$  e  $\lambda^-$ , idem para o material na compressão. O índice "t", acrescentado às variáveis internas  $\alpha_d$  e  $\alpha_h$  e aos expoentes  $n_d$  e  $n_h$  indica tração e o índice "c" indica compressão.

As equações da Energia Livre de Helmholtz e das forças termodinâmicas generalizadas passam a ser definidas conforme as equações (5.42) a (5.47). Nas equações da tensão e das forças termodinâmicas será suprimida a notação de dependência das variáveis primais  $(\epsilon, \alpha_{dt}, \alpha_{dc}, \alpha_{ht}, \alpha_{hc})$  para simplificar.

$$\begin{aligned} \psi^+(\epsilon, \alpha_{dt}, \alpha_{dc}, \alpha_{ht}, \alpha_{hc}) &= \frac{1}{2\rho(\alpha_{dt}, \alpha_{dc}, \alpha_{ht}, \alpha_{hc})} \left[ 2G^+ \epsilon \bullet \epsilon + \lambda^+ tr^2 \epsilon \right] \quad se \quad tr \epsilon \geq 0 \\ \psi^-(\epsilon, \alpha_{dt}, \alpha_{dc}, \alpha_{ht}, \alpha_{hc}) &= \frac{1}{2\rho(\alpha_{dt}, \alpha_{dc}, \alpha_{ht}, \alpha_{hc})} \left[ 2G^- \epsilon \bullet \epsilon + \lambda^- tr^2 \epsilon \right] \quad se \quad tr \epsilon \leq 0 \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned}
\sigma^+ &= [2G^+ \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda^+ \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}] \text{ se } \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \geq 0 \\
\sigma^- &= [2G^- \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda^- \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}] \text{ se } \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \leq 0
\end{aligned} \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned}
A_t^{d+} &= -\rho \frac{\partial \psi^+}{\partial \alpha_{dt}} = -\frac{1}{2} \left[ 2 \frac{\partial G^+}{\partial \alpha_{dt}} \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \lambda^+}{\partial \alpha_{dt}} \text{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_{dt}} (2G^+ \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda^+ \text{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon}) \right] \text{ se } \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \geq 0 \\
A_t^{d-} &= -\rho \frac{\partial \psi^-}{\partial \alpha_{dt}} = -\frac{1}{2} \left[ 2 \frac{\partial G^-}{\partial \alpha_{dt}} \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \lambda^-}{\partial \alpha_{dt}} \text{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_{dt}} (2G^- \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda^- \text{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon}) \right] \text{ se } \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \leq 0
\end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned}
A_c^{d+} &= -\rho \frac{\partial \psi^+}{\partial \alpha_{dc}} = -\frac{1}{2} \left[ 2 \frac{\partial G^+}{\partial \alpha_{dc}} \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \lambda^+}{\partial \alpha_{dc}} \text{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_{dc}} (2G^+ \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda^+ \text{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon}) \right] \text{ se } \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \geq 0 \\
A_c^{d-} &= -\rho \frac{\partial \psi^-}{\partial \alpha_{dc}} = -\frac{1}{2} \left[ 2 \frac{\partial G^-}{\partial \alpha_{dc}} \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \lambda^-}{\partial \alpha_{dc}} \text{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_{dc}} (2G^- \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda^- \text{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon}) \right] \text{ se } \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \leq 0
\end{aligned} \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned}
A_t^{h+} &= \rho \frac{\partial \psi^+}{\partial \alpha_{ht}} = \frac{1}{2} \left[ 2 \frac{\partial G^+}{\partial \alpha_{ht}} \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \lambda^+}{\partial \alpha_{ht}} \text{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_{ht}} (2G^+ \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda^+ \text{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon}) \right] \text{ se } \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \geq 0 \\
A_t^{h-} &= \rho \frac{\partial \psi^-}{\partial \alpha_{ht}} = -\frac{1}{2} \left[ 2 \frac{\partial G^-}{\partial \alpha_{ht}} \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \lambda^-}{\partial \alpha_{ht}} \text{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_{ht}} (2G^- \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda^- \text{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon}) \right] \text{ se } \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \leq 0
\end{aligned} \tag{5.46}$$

$$\begin{aligned}
A_c^{h+} &= \rho \frac{\partial \psi^+}{\partial \alpha_{hc}} = \frac{1}{2} \left[ 2 \frac{\partial G^+}{\partial \alpha_{hc}} \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \lambda^+}{\partial \alpha_{hc}} tr^2 \boldsymbol{\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_{hc}} (2G^+ \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda^+ tr^2 \boldsymbol{\varepsilon}) \right] \quad se \quad tr \boldsymbol{\varepsilon} \geq 0 \\
A_c^{h-} &= \rho \frac{\partial \psi^-}{\partial \alpha_{dc}} = \frac{1}{2} \left[ 2 \frac{\partial G^-}{\partial \alpha_{hc}} \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \lambda^-}{\partial \alpha_{hc}} tr^2 \boldsymbol{\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_{hc}} (2G^- \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda^- tr^2 \boldsymbol{\varepsilon}) \right] \quad se \quad tr \boldsymbol{\varepsilon} \leq 0
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Observa-se que a determinação de tração ou compressão é realizada pela análise do traço do tensor de deformações, essa hipótese foi realizada com base no trabalho de Contrafatto e Cuomo (2006).

No caso da distinção do comportamento para a tração e para a compressão, são necessárias duas funções de remodelamento, uma que define a superfície limite na tração e outra na compressão.

Contrafatto e Cuomo (2006) apresentam, para o concreto, dois critérios de falha, um de Drucker-Prager na tração e outro de Ottosen na compressão.

Com foco na proposta de separação das funções de remodelamento e buscando sempre uma função de remodelamento do tipo  $f = f(\boldsymbol{\sigma}, A^d, A^h)$ , são propostas duas funções de remodelamento baseadas no critério de Drucker-Prager (equação (5.48)) e duas funções de remodelamento baseadas no critério de Tsai-Wu (equação (5.49)).

Para o critério de Drucker-Prager as funções de remodelamento propostas são:

$$\begin{aligned}
f(I_1, J_2, A_c^{d+}, A_t^{d+}, A_c^{h+}, A_t^{h+}) &= \mu \sqrt{J_2} + \beta I_1 + (A_c^{d+} + A_t^{d+} - A_0^{d+}) \\
&\quad - (A_c^{h+} + A_t^{h+} - A_0^{h+}) \leq 0 \quad se \quad tr \boldsymbol{\varepsilon} \geq 0 \\
f(I_1, J_2, A_c^{d-}, A_t^{d-}, A_c^{h-}, A_t^{h-}) &= \mu \sqrt{J_2} + \beta I_1 + (A_c^{d-} + A_t^{d-} - A_0^{d-}) \\
&\quad - (A_c^{h-} + A_t^{h-} - A_0^{h-}) \leq 0 \quad se \quad tr \boldsymbol{\varepsilon} \leq 0
\end{aligned} \tag{5.48}$$

para a qual  $A_c^{d+}, A_t^{d+}, A_c^{h+}, A_t^{h+}$  são as forças termodinâmicas de perda e de ganho de rigidez na tração e na compressão para o material em tração,  $A_c^{d-}, A_t^{d-}, A_c^{h-}, A_t^{h-}$  são as forças termodinâmicas de perda e de ganho de rigidez na tração e na compressão para o material em compressão. As forças termodinâmicas

$A_0^{d+}, A_0^{d-}, A_0^{h+}, A_0^{h-}$  representam o início da fase de perda e de ganho de rigidez, para a tração e para a compressão.

Para o critério de Tsai-Wu as funções de remodelamento propostas são:

$$f = \frac{1}{X_T^+ \cdot |X_C^+|} \sigma_{11}^2 + \frac{1}{Y_T^+ \cdot |Y_C^+|} \sigma_{22}^2 + \frac{1}{S^{+2}} \sigma_{12}^2 + \left( \frac{1}{X_T^+} - \frac{1}{|X_C^+|} \right) \sigma_{11} + \left( \frac{1}{Y_T^+} - \frac{1}{|Y_C^+|} \right) \sigma_{22} - 1 \leq 0$$

se  $tr\epsilon \geq 0$

(5.49)

$$f = \frac{1}{X_T^- \cdot |X_C^-|} \sigma_{11}^2 + \frac{1}{Y_T^- \cdot |Y_C^-|} \sigma_{22}^2 + \frac{1}{S^{-2}} \sigma_{12}^2 + \left( \frac{1}{X_T^-} - \frac{1}{|X_C^-|} \right) \sigma_{11} + \left( \frac{1}{Y_T^-} - \frac{1}{|Y_C^-|} \right) \sigma_{22} - 1 \leq 0$$

se  $tr\epsilon \leq 0$

considerando-se para as resistências definidas na equação (5.38):

$$\begin{aligned} X_C^+ &= X_C - (A_c^{d+} + A_t^{d+}) + (A_c^{h+} + A_t^{h+}) \\ X_T^+ &= X_T - (A_c^{d+} + A_t^{d+}) + (A_c^{h+} + A_t^{h+}) \\ Y_C^+ &= Y_C - (A_c^{d+} + A_t^{d+}) + (A_c^{h+} + A_t^{h+}) \\ Y_T^+ &= Y_T - (A_c^{d+} + A_t^{d+}) + (A_c^{h+} + A_t^{h+}) \\ X_C^+ &= X_C - (A_c^{d+} + A_t^{d+}) + (A_c^{h+} + A_t^{h+}) \\ S^+ &= S - (A_c^{d+} + A_t^{d+}) + (A_c^{h+} + A_t^{h+}) \end{aligned}$$

(5.50)

e ainda:

$$\begin{aligned} X_C^- &= X_C - (A_c^{d-} + A_t^{d-}) + (A_c^{h-} + A_t^{h-}) \\ X_T^- &= X_T - (A_c^{d-} + A_t^{d-}) + (A_c^{h-} + A_t^{h-}) \\ Y_C^- &= Y_C - (A_c^{d-} + A_t^{d-}) + (A_c^{h-} + A_t^{h-}) \\ Y_T^- &= Y_T - (A_c^{d-} + A_t^{d-}) + (A_c^{h-} + A_t^{h-}) \\ X_C^- &= X_C - (A_c^{d-} + A_t^{d-}) + (A_c^{h-} + A_t^{h-}) \\ S^- &= S - (A_c^{d-} + A_t^{d-}) + (A_c^{h-} + A_t^{h-}) \end{aligned}$$

(5.51)

onde as forças termodinâmicas têm a mesma representação descrita para a equação (5.48).

Dessa forma, para os dois critérios, devem ser definidas duas regiões admissíveis ( $P$ ):

$$\begin{aligned} P &= \left\{ \left( \sigma, A^{d+}, A^{h+} \right) / f\left( \sigma, A^{d+}, A^{h+} \right) \leq 0 \right\} \quad \text{se } tr\epsilon \geq 0 \\ P &= \left\{ \left( \sigma, A^{d-}, A^{h-} \right) / f\left( \sigma, A^{d-}, A^{h-} \right) \leq 0 \right\} \quad \text{se } tr\epsilon \leq 0 \end{aligned} \quad (5.52)$$

e a região de interesse,  $P_A$ , também separada para a tração e a compressão, passa agora a ser definida por:

$$\begin{aligned} P_A &= \left\{ \left( A^{d+}, A^{h+} \right) / f\left( \sigma, A^{d+}, A^{h+} \right) \leq 0 \right\} \quad \text{se } tr\epsilon \geq 0 \\ P_A &= \left\{ \left( A^{d-}, A^{h-} \right) / f\left( \sigma, A^{d-}, A^{h-} \right) \leq 0 \right\} \quad \text{se } tr\epsilon \leq 0 \end{aligned} \quad (5.53)$$

gerando duas superfícies distintas que definem quando o remodelamento ósseo se desenvolve, tanto para a tração quanto para a compressão.

### 5.3 EXEMPLO DE REMODELAMENTO EM UMA BARRA CONSIDERANDO O ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES

O exemplo bidimensional desenvolvido neste trabalho, representa uma trabécula óssea sujeita a um carregamento de compressão que controla o remodelamento ósseo.

Para o processamento e obtenção de resultados foi desenvolvido um programa, denominado REMOLD 2D (ver item 6), que também utiliza, para a solução do equilíbrio global, o Método Quase-Newton e para a determinação dos incrementos das variáveis internas, por meio dos algoritmos da programação matemática, o Método de Newton-Raphson.

O programa REMOLD 2D considera para o exemplo desenvolvido, o estado plano de deformação, mas também pode ser adaptado para descrever o estado plano de tensão.

As propriedades do osso, bem como as características de geometria e carregamento do modelo, estão descritas na Tabela 5.1.

Os elementos 10 e 40 do modelo foram considerados com dano inicial, ou seja, para esses elementos foi imposto o coeficiente de perda de rigidez de 0,67, enquanto que para os demais elementos o mesmo coeficiente foi definido inicialmente nulo.

No caso desse exemplo bidimensional, os dados considerados para o material foram obtidos a partir dos ensaios realizados por Kopperdahl e Keaveny (1998) e estão descritos no item 2.3.3.

Tabela 5.1 – Características do material e da geometria

PARÂMETROS	VALORES
Comprimento ( $\mu\text{m}$ )	500
Altura ( $\mu\text{m}$ )	200
Espessura ( $\mu\text{m}$ )	100
Módulo de Young $E_0$ (MPa)	378
Coefficiente de Poisson	0,25
Valor máximo de $\alpha_d$	0,67
Valor máximo de $\alpha_h$	1,0
Carga distribuída (N/m)	3500

Na Figura 5.1 tem-se a representação geral do modelo construído para a simulação do remodelamento ósseo. As condições de contorno impostas são o engastamento na extremidade esquerda e a aplicação do carregamento distribuído na extremidade direita da barra.

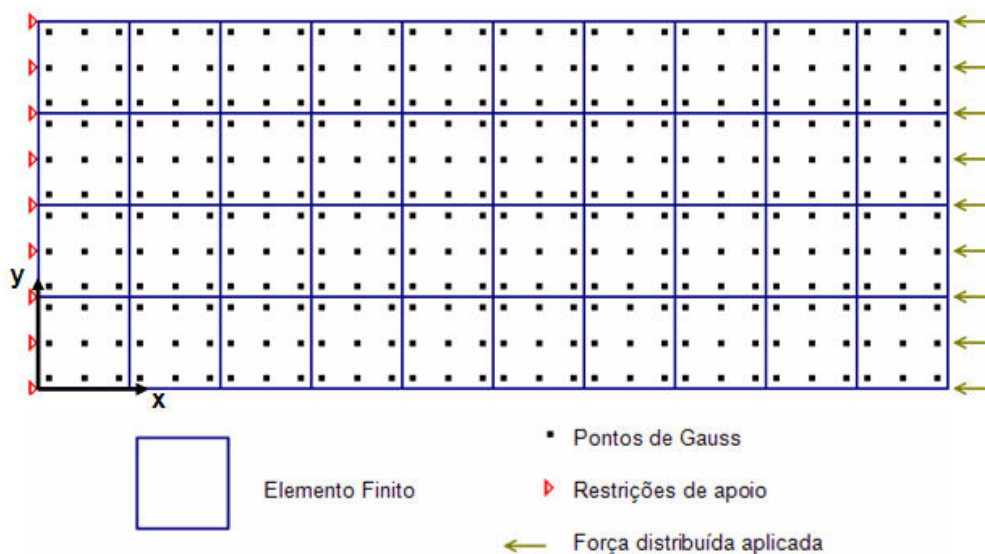


Figura 5.1 – Modelo de Elementos Finitos utilizado.

O elemento implementado é quadrilateral quadrático, com oito nós e com nove pontos de Gauss. Na Figura 5.2 são mostradas as numerações dos elementos (total de 40 elementos) e dos nós (total de 149 nós).

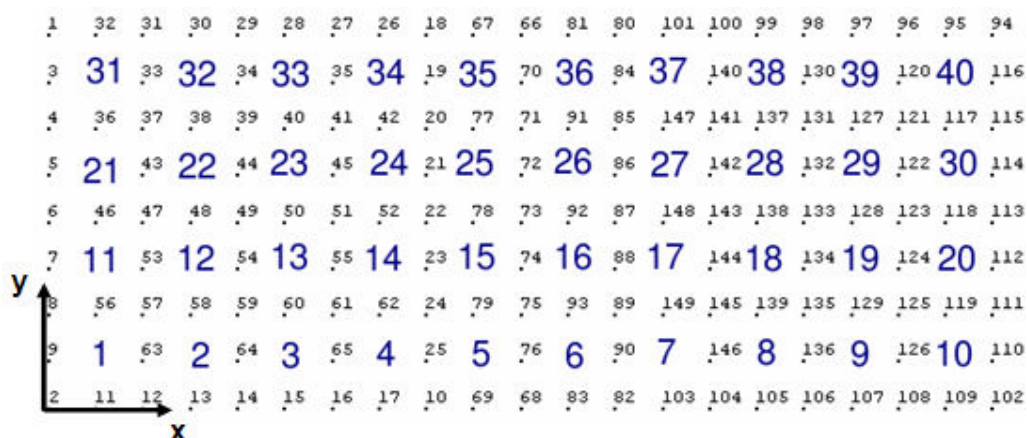


Figura 5.2 – Numeração utilizada para os nós (números menores) e para os elementos (números maiores) da malha de Elementos Finitos.

O número de alguns pontos de Gauss do modelo (total de 360 pontos) está ilustrado na Figura 5.3, bem como a ordem de implementação desses pontos.

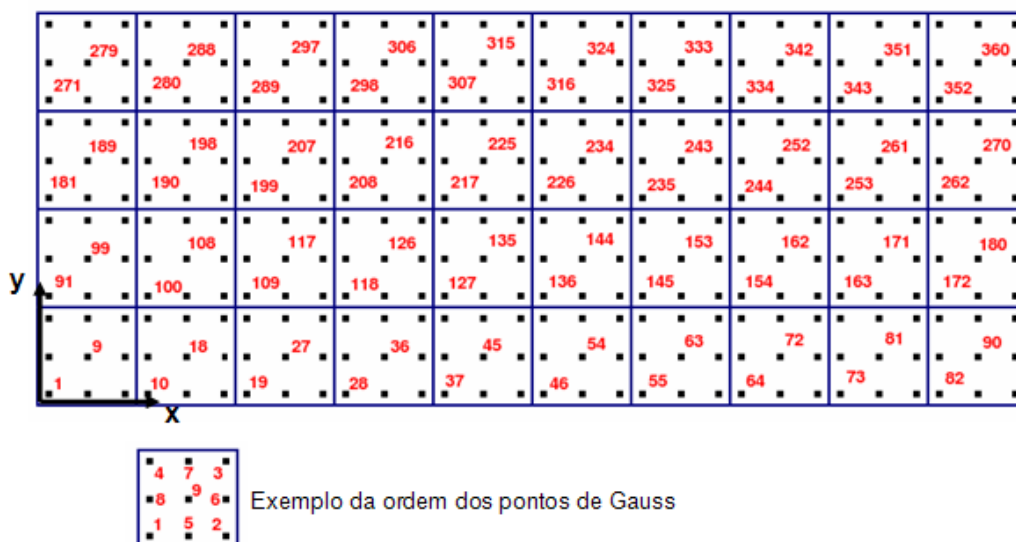


Figura 5.3 – Numeração de alguns pontos de Gauss da malha e ilustração da ordem desses pontos por elemento.

Para facilitar o trabalho de geração da malha, a mesma foi gerada no



software Ansys® e importada para o programa desenvolvido para o remodelamento ósseo bidimensional, o REMOLD 2D.

A função de remodelamento utilizada no programa REMOLD 2D foi aquela descrita na equação (5.28) e os parâmetros adotados para o exemplo estão descritos da Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Parâmetros da função de remodelamento

PARÂMETROS	VALORES
Coeficiente $\beta$	0,000012
Coeficiente $\mu$	0,0000039
Força termodinâmica $A_0^d$ (Pa)	969,61
Força termodinâmica $A_0^h$ (Pa)	10000

O processamento do exemplo bidimensional foi realizado com a utilização de 500 passos de carga, para os quais o carregamento aplicado foi dividido em incrementos iguais.

Da Figura 5.4 até a Figura 5.8, a representação P indica passo e o número identifica em qual passo de carga o resultado foi obtido.

Na Figura 5.4 tem-se a evolução da variável de perda de rigidez durante o fenômeno de remodelamento, para alguns passos de carga. Pode-se observar na Figura 5.4 (B) e na Figura 5.4 (C), que a perda de rigidez inicia no material íntegro, na extremidade direita da barra, onde foi aplicado o carregamento e vai avançando para o restante da barra.

Quando a variável  $\alpha_d$  atinge seu valor máximo (0,67), inicia-se o ganho de rigidez, cuja evolução ao longo do processo está representada, para alguns passos de carga, na Figura 5.5.

Por sua vez, a variável de ganho de rigidez atua primeiramente nos elementos inicialmente danificados e depois evolui para os demais elementos da barra, conforme mostra a Figura 5.5 (B) e a Figura 5.5 (C).

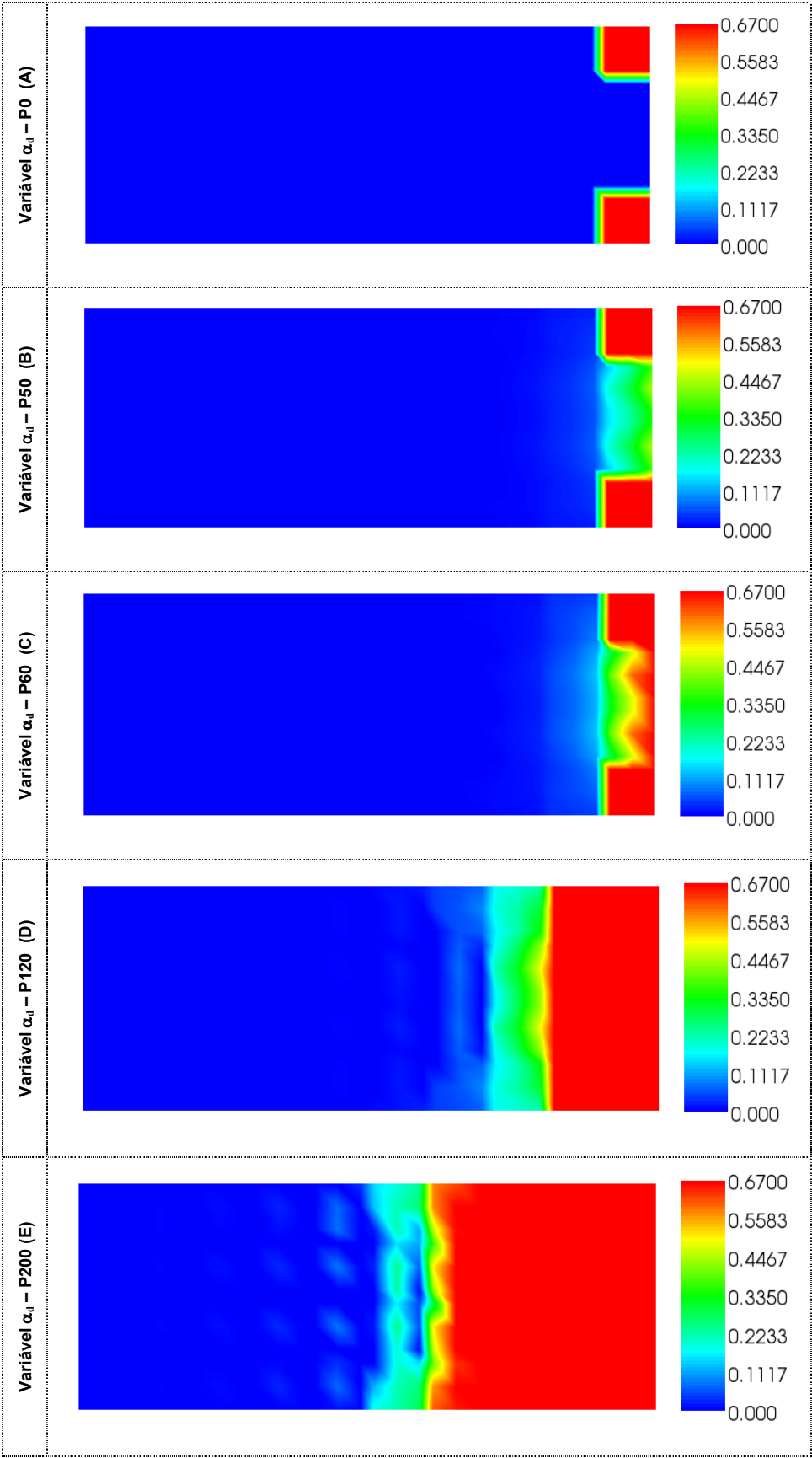
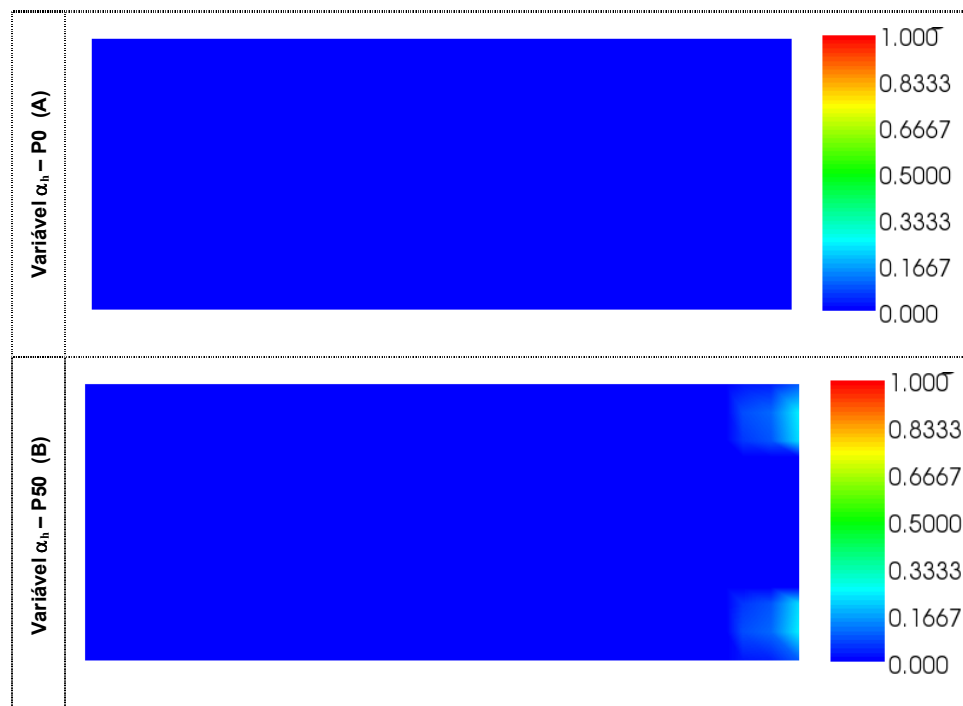




Figura 5.4 – Evolução da variável de perda de rigidez ( $\alpha_d$ ) para alguns passos de carga.

As variáveis de perda e de ganho de rigidez têm os valores máximos, para toda a trabécula, ilustrados pela Figura 5.4(F) e pela Figura 5.5 (F), respectivamente.

O Módulo de Young, que varia de acordo com as variáveis internas, evolui nesse exemplo bidimensional, conforme mostrado na Figura 5.6.



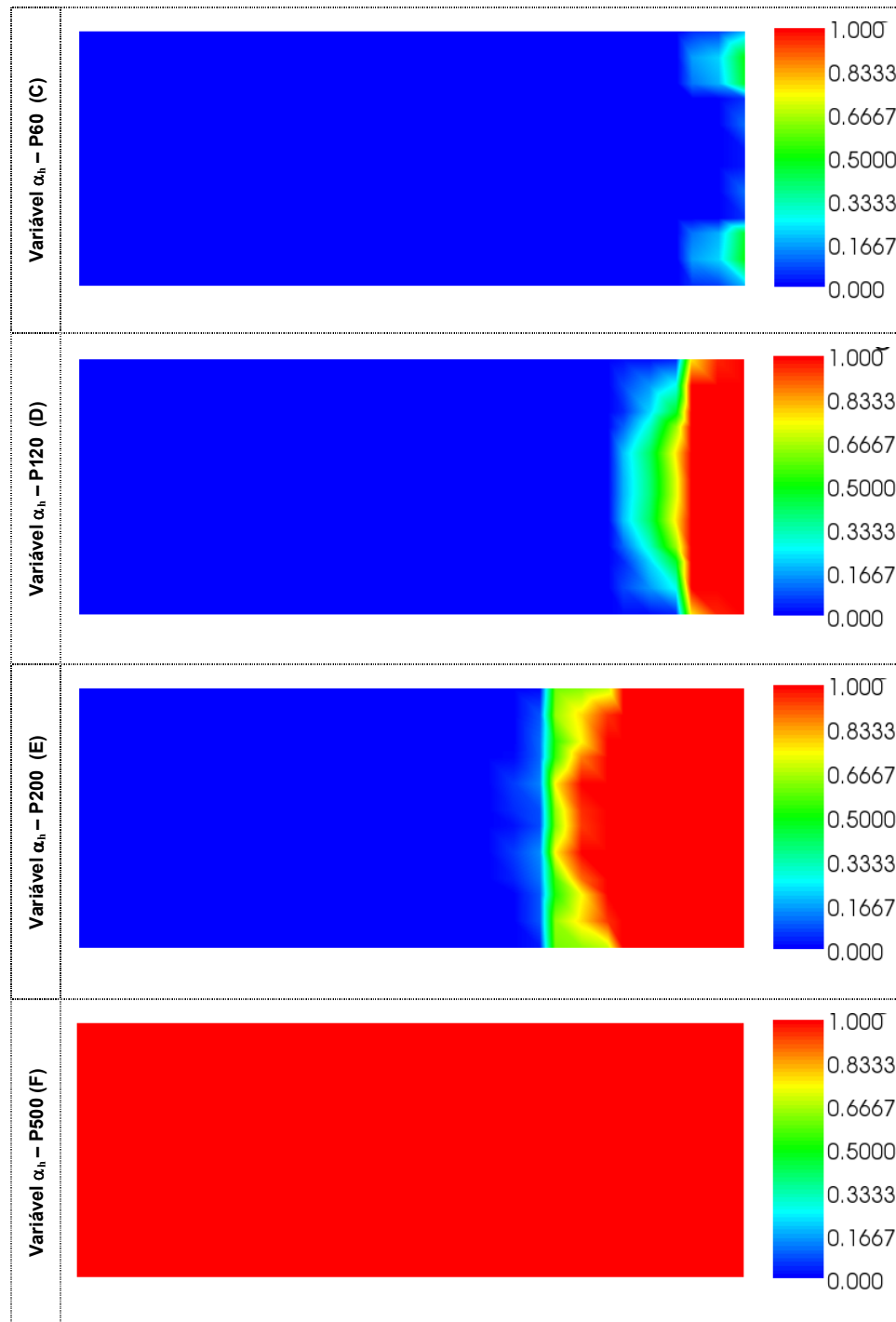
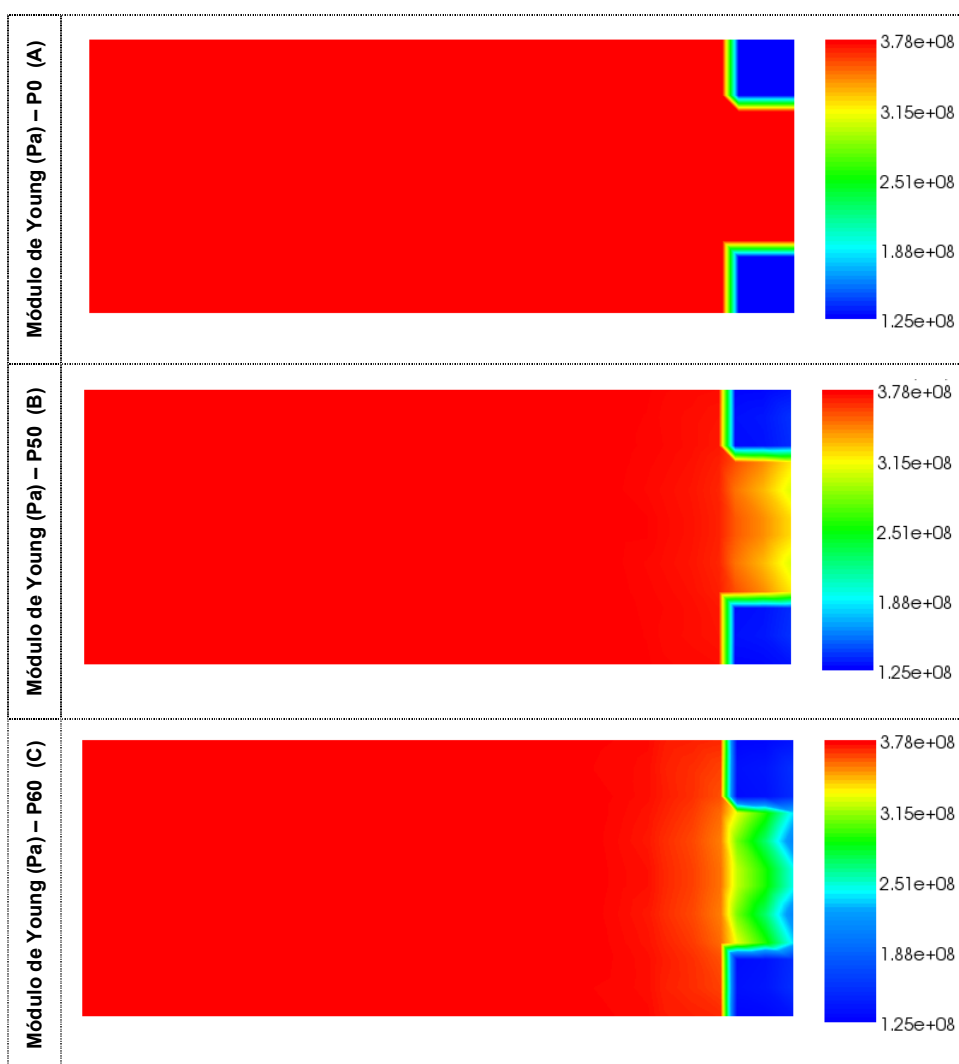


Figura 5.5 – Evolução da variável de ganho de rigidez ( $\alpha_h$ ) para alguns passos de carga.

A Figura 5.6 (A) deixa bem clara a diferença no módulo de Young inicial para os elementos 10 e 40 (inicialmente danificados).

Uma verificação importante é que no final do remodelamento ósseo, no passo 500 (Figura 5.6 (F)) o módulo de Young não voltou ao valor inicial. Isso deve-se ao fato de terem sido estabelecidos valores máximos de variáveis internas que não permitem que o módulo inicial seja recuperado no exemplo. Verifica-se que o remodelamento ósseo termina com o módulo de Young valendo aproximadamente 250 MPa .

A recuperação total do módulo de Young pode ser verificada, desde que sejam consideradas variáveis de ganho de rigidez adequadas para isso.



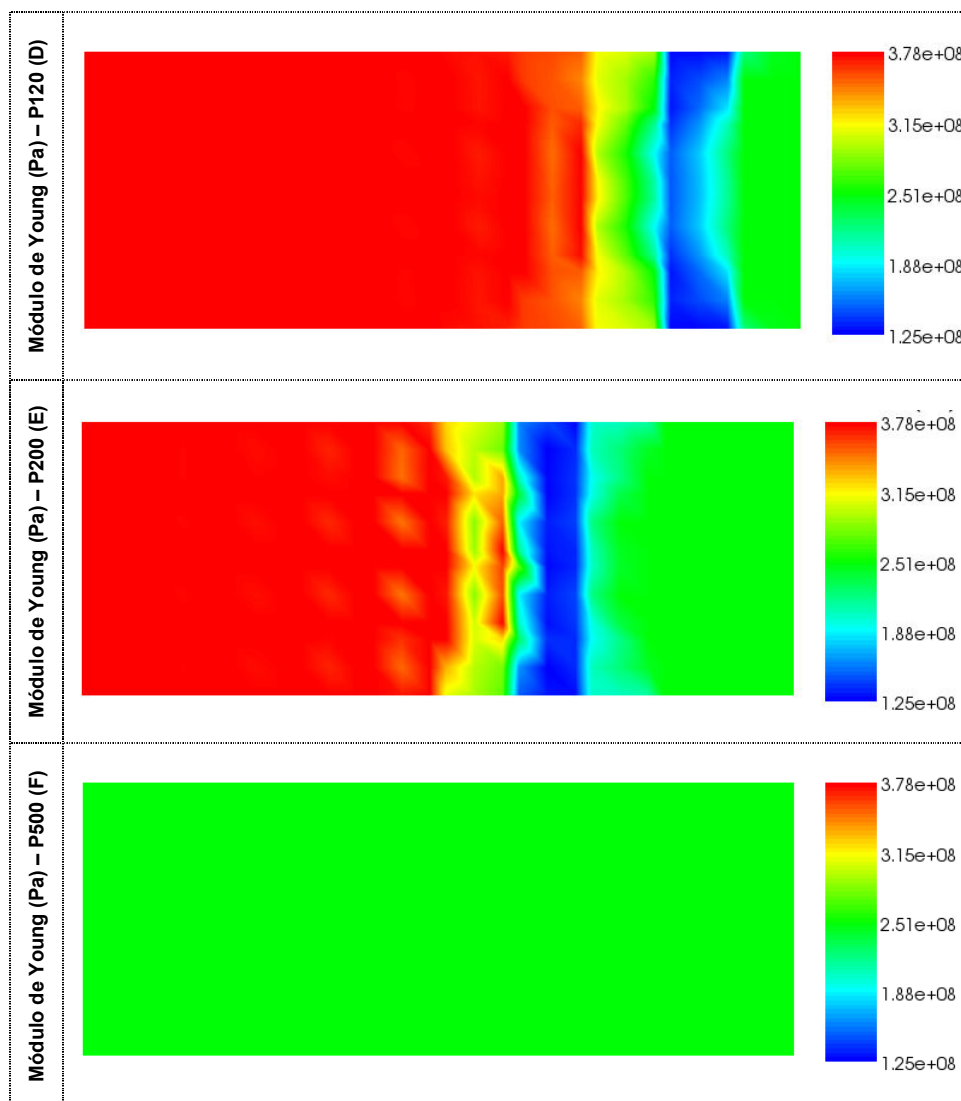


Figura 5.6 – Evolução do Módulo de Young para alguns passos de carga.

As deformações na direção de  $x$  não iniciam em zero por causa da definição dos intervalos de valores para obtenção dos resultados. Observa-se, na Figura 5.7, deformações positivas para uma barra sujeita à compressão. Na realidade, esses valores são os extremos do intervalo e não ocorrem nesse exemplo.

As deformações na direção de  $x$  evoluem de acordo com a Figura 5.7 e os valores máximos de deformação nessa direção chegam são da ordem de  $0,05 \mu\text{m}$  (de compressão).

Na Figura 5.8 são mostradas as deformações na direção  $y$ , para alguns passos de carga. As deformações máximas em  $y$  são muito menores do que as

deformações em x.

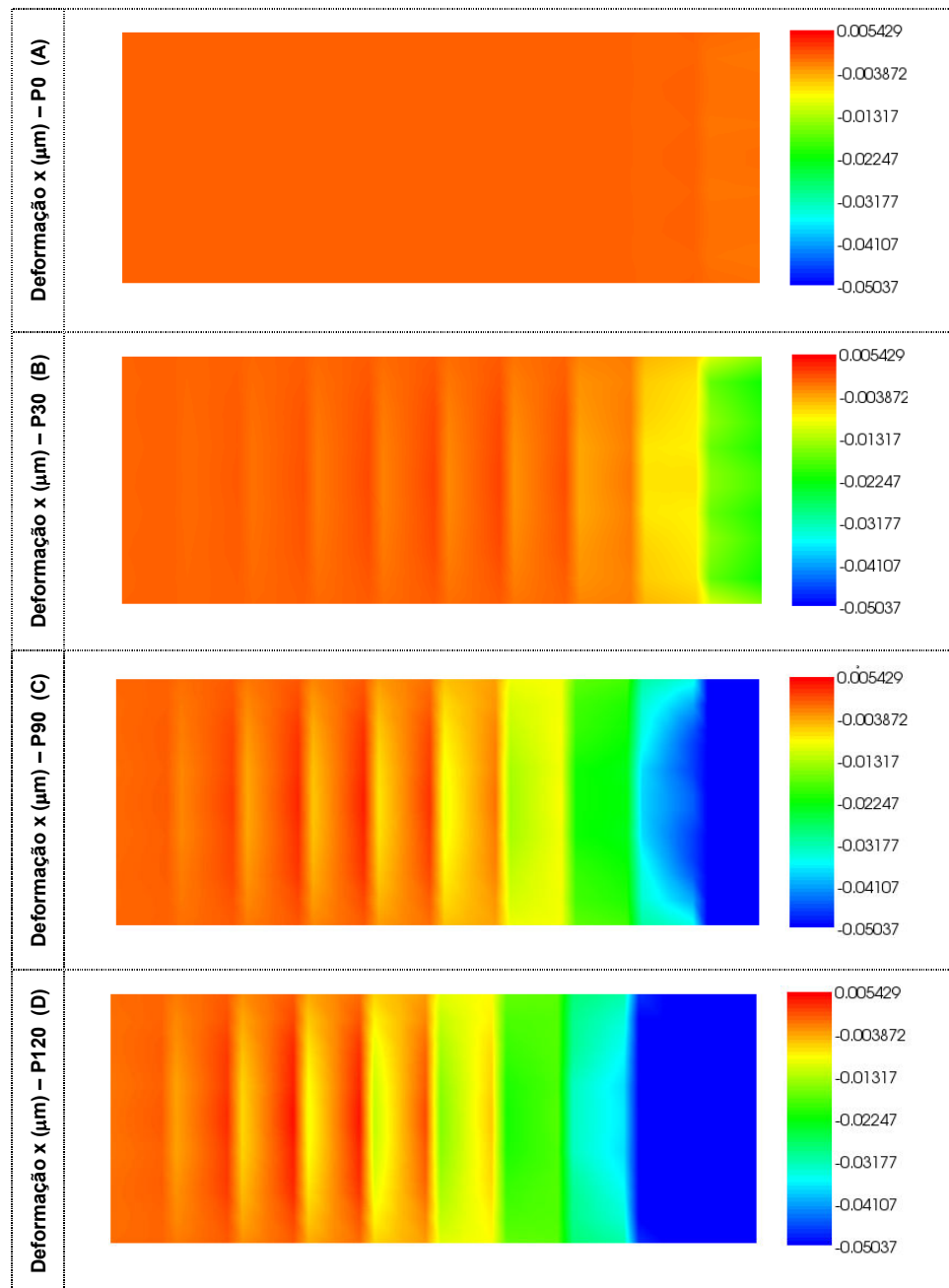


Figura 5.7 – Evolução das deformações na direção x para alguns passos de carga.

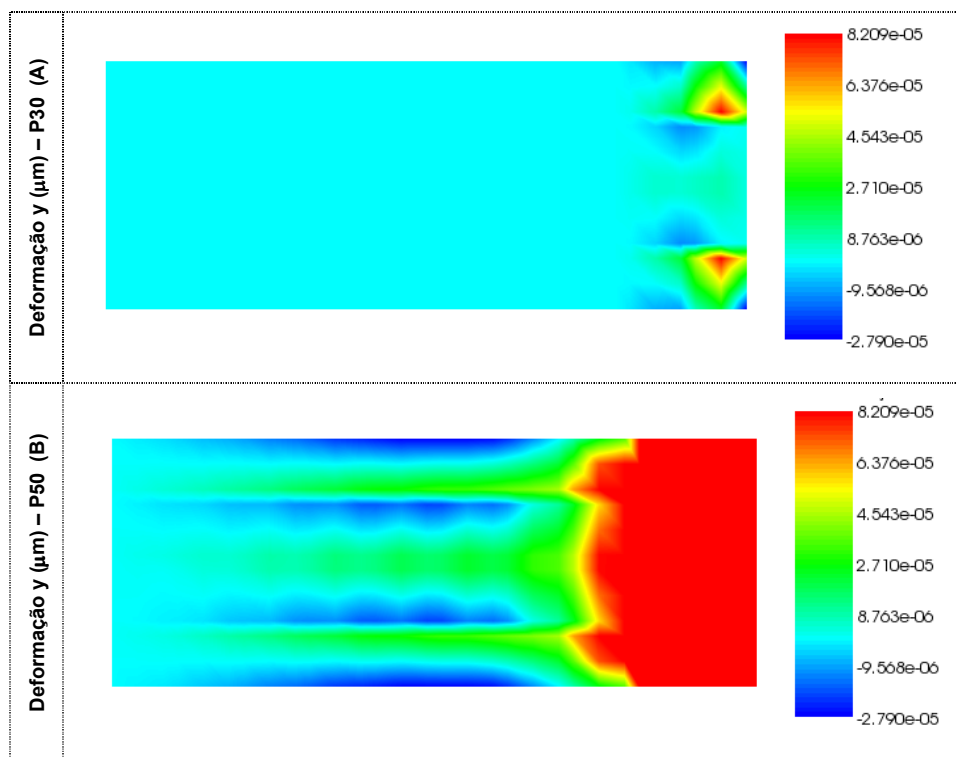


Figura 5.8 – Evolução das deformações na direção y para alguns passos de carga.

Os resultados obtidos para o modelo bidimensional foram bastante satisfatórios, principalmente do ponto de vista qualitativo do fenômeno.

Alguns dos valores utilizados no processamento do exemplo foram adotados com base no comportamento esperado, principalmente para a fase de ganho de rigidez.

Para a fase de perda de rigidez foram adotadas propriedades dos materiais baseados em Kopperdahl e Keaveny (1998).

Nesse exemplo, a densidade óssea efetiva foi considerada constante em relação às variáveis internas, por falta de resultados experimentais que permitissem a definição dessa dependência.

Kopperdahl e Keaveny (1998) apresentam uma relação entre a densidade e o módulo de Young. Dessa forma, torna-se desnecessária a avaliação da evolução da densidade, bastando o acompanhamento da evolução do módulo de Young.



## 6 PROGRAMAS REMOLD 1D E REMOLD 2D

Com base na formulação desenvolvida e apresentada nos itens 3, 4 e 5 deste trabalho, foram construídos dois programas de remodelamento ósseo, capazes de descrever o remodelamento ósseo para os casos unidimensionais (REMOLD 1D) e bidimensionais (REMOLD 2D).

A elaboração dos programas foi desenvolvida em parceria com o Emílio Mercuri, mestrando, que faz parte do grupo de Bioengenharia da UFPR, que desenvolveu principalmente a programação.

O compilador utilizado para o desenvolvimento do programa foi o GFortran 4.1 (GNU Fortran compiler, part of GCC).

Para a visualização dos resultados e obtenção das imagens que foram anexadas no trabalho, foi utilizado o software ParaView 3.2.3 (Parallel Visualization application kitware).

A discretização espacial é obtida aplicando o Método dos Elementos Finitos e a discretização temporal foi introduzida independentemente da espacial.

Os programas REMOLD 1D e REMOLD 2D combinam o Método Quase-Newton para resolver o problema do equilíbrio global e um algoritmo da programação matemática, que utiliza o Método de Newton-Raphson, para a resolução das equações constitutivas.

O algoritmo utilizado na programação do fenômeno do remodelamento ósseo está ilustrado, de forma bastante simplificada na Figura 6.1.

A Figura 6.2 representa uma rotina que determina como os programas tratam o caso da função de remodelamento não ser negativa e nem nula, ou seja, quando a função de remodelamento assume valores que violam as condições de “zona morta” e portanto tem início o remodelamento ósseo.

Nos programas também é necessário estabelecer o que ocorre quando as variáveis internas assumem seus valores máximos. A Figura 6.3 ilustra o que foi implementado para cada condição das variáveis de remodelamento.

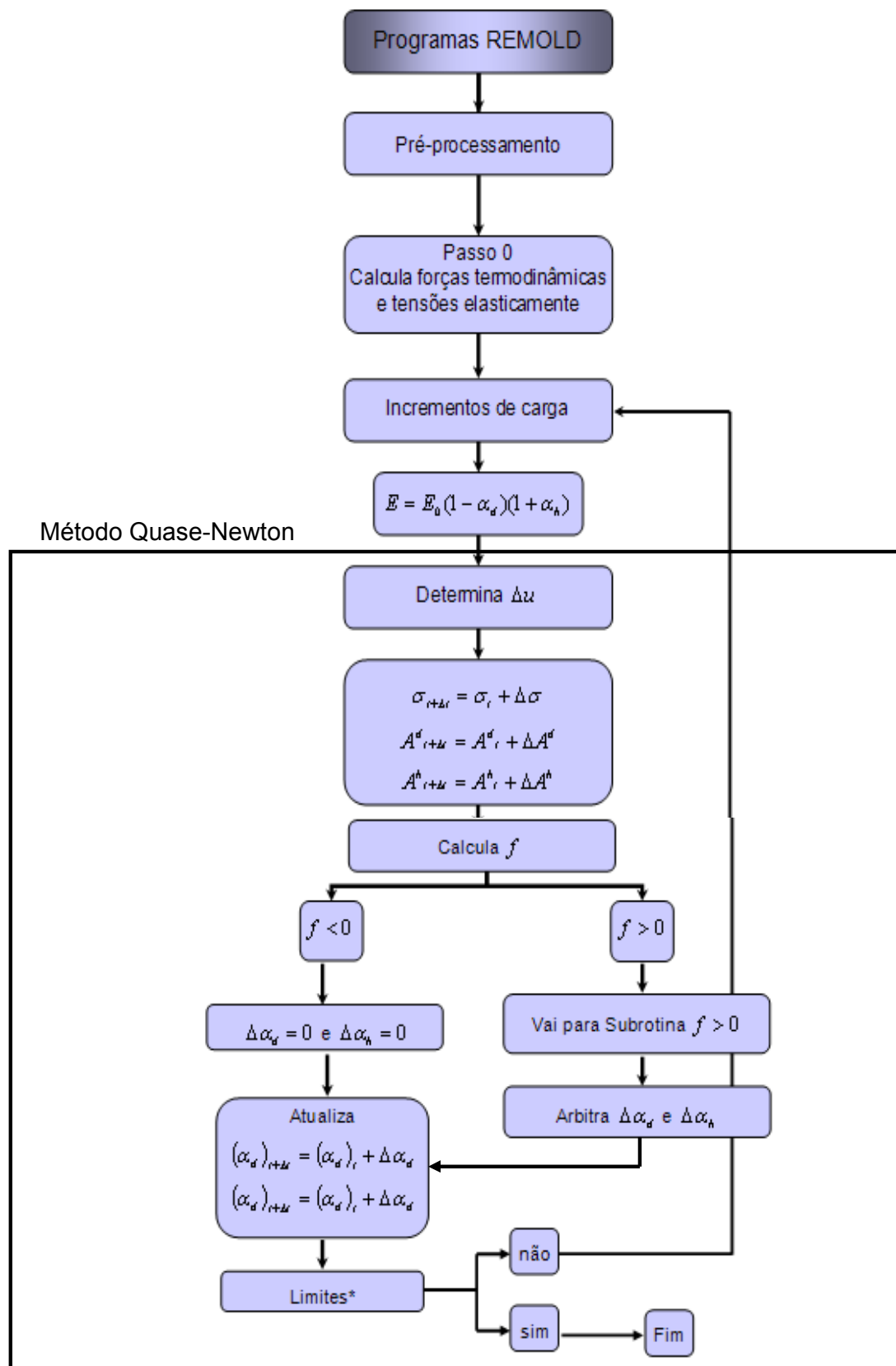


Figura 6.1 – Fluxograma com o algoritmo simplificado dos programas.

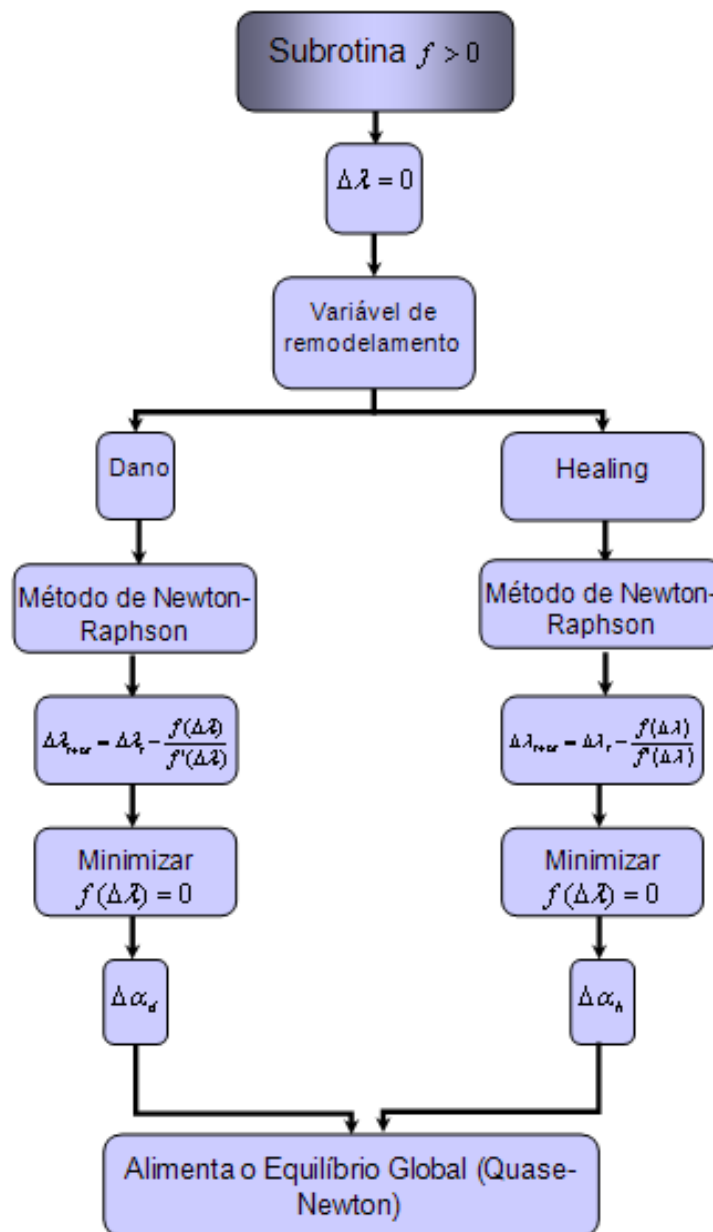


Figura 6.2 – Fluxograma com o algoritmo da subrotina da função de remodelamento positiva.

Não é objetivo deste trabalho o detalhamento das rotinas de programação. Essas informações podem ser obtidas no trabalho de Mercuri (2009).

Os programas REMOLD 1D e REMOLD 2D têm a função de reproduzir a teoria de remodelamento ósseo proposta, que é o grande objetivo deste trabalho, e permitir que os resultados numéricos sejam observados e consequentemente

comparados ao que se encontra na literatura.

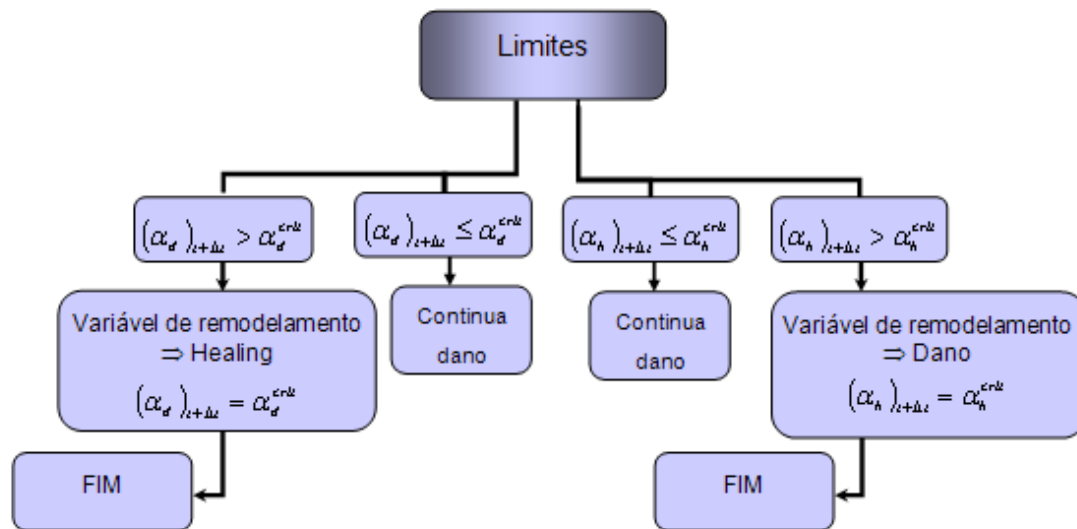


Figura 6.3 – Fluxograma com a definição dos limites das variáveis de remodelamento.

## 7 CONCLUSÃO

Os modelos de remodelamento ósseo definidos na literatura estão, quase sempre, vinculados à imposição de regras que determinam o comportamento das variáveis de remodelamento, muitos deles são baseados na Termodinâmica e na Mecânica do Dano, mas não possuem o mesmo formalismo empregado no modelo proposto.

Os Potenciais Termodinâmicos utilizados para descrever o remodelamento foram a Densidade de Energia Livre de Helmholtz e o potencial complementar, Densidade de Energia Livre de Gibbs, que geraram as Leis de Estado nas formas primal e dual.

A evolução das variáveis internas ao longo do processo foi determinada por meio de algoritmos da programação matemática, utilizando-se uma função de remodelamento, escolhida entre as várias apresentadas no item 5.1.

A implementação numérica da formulação foi feita para a obtenção de resultados passíveis de comparação com dados da literatura.

Pode-se concluir que a formulação apresentada permite a análise de diversos problemas de remodelação óssea, desde modelos simples até problemas que incorporem inúmeras variáveis internas escalares para representar de forma mais precisa os processos de perda e ganho de rigidez no material ósseo, levando em consideração fatores mecânicos e biológicos.

Uma das grandes vantagens de trabalhar com o formalismo apresentado é que seguramente esse formalismo não viola as leis da termodinâmica e além disso, outra vantagem é permitir que sejam estabelecidas fases isoladas de perda e de ganho de rigidez no material. Observando os trabalhos de vários pesquisadores pode-se verificar que, na maioria deles, os processos de perda e ganho de rigidez estão acoplados num mesmo instante de tempo, o que não é condizente com as observações experimentais encontradas na literatura.

No contexto do trabalho procurou-se salientar, com base nas informações obtidas nos trabalhos de diversos pesquisadores, a importância da obtenção de resultados experimentais e a dificuldade de encontrar parâmetros para uma padronização no caso de um material anisotrópico que tem seu comportamento

determinado por tantos fatores (mecânicos, sexo, idade, espécie, doenças, tipo de osso entre outros).

A caracterização dos ossos é fundamental para a determinação dos parâmetros do modelo de remodelamento e a descoberta do microdano, como um dos principais estímulos do processo de remodelação, fez com que diversos pesquisadores se interessassem mais pelo estudo de como o dano evolui e de como ele é removido pela aposição óssea.

Deve-se considerar que o comportamento distinto do microdano na tração e na compressão, conforme observado no trabalho de Sahar et al. (2005) é um indicador de que as variáveis internas utilizadas no modelo proposto devem ser diferenciadas para cada condição de tensão. Nos exemplos apresentados nos itens 4.2, 4.3 e 5.3 as variáveis internas foram consideradas iguais na tração e na compressão. A formulação que contempla a diferenciação do remodelamento ósseo na tração e na compressão foi apresentada no item 5.2 mas não foi implementada neste trabalho.

Como exemplos do trabalho foram escolhidos problemas simples, mas que são capazes de representar o remodelamento ósseo com as particularidades da formulação.

Foi apresentado um exemplo unidimensional bastante simples, definido por um único elemento. Esse exemplo serviu para ilustrar e definir o comportamento das funções de remodelamento e das variáveis de estado, além de estabelecer as regiões termodinamicamente admissíveis, para cada fase do remodelamento ósseo.

A partir do que ficou estabelecido nesse primeiro modelo, partiu-se para o processamento de um outro exemplo unidimensional, uma barra com dois elementos. O programa REMOLD 1D, utilizado para o material inicialmente íntegro e depois para um elemento inicialmente danificado, mostrou que os resultados da formulação proposta ficaram muito próximos dos utilizados para comparação, para a fase de perda de rigidez do material.

Em termos de resultados de evolução das variáveis internas para o exemplo unidimensional, pode-se concluir que a mesma é totalmente aferida pelos parâmetros do modelo de remodelamento.

Para o problema bidimensional foi definido um exemplo de uma trabécula óssea com dano inicial em dois elementos, e o resultados mostraram-se bastante satisfatórios, uma vez que o remodelamento foi reproduzido da forma com que é

descrito na literatura, ou seja, com uma perda de rigidez provocada pelo microdano, seguido de um ganho de rigidez que recupera o material, conforme determinados critérios principalmente com relação à função de remodelamento.

As conclusões relevantes sobre o exemplo bidimensional estão descritas no item 5.3.

Os limites das variáveis internas de perda e de ganho de rigidez foram estabelecidos, tanto para os modelos unidimensionais quanto para os bidimensionais, de forma que não ocorra a perda total de rigidez do material (variável  $\alpha_d = 1$ ). Para o ganho de rigidez foi estabelecido um limite de  $\alpha_h = 1$ , fazendo com que o módulo de Young não recuperasse seu valor inicial. Essa hipótese pode ser alterada e a variável de ganho de rigidez assumir valores superiores a 1.

Não foram definidos maiores detalhes da programação do REMOLD 1D e do REMOLD 2D porque, como já comentado, esse não é o escopo principal do trabalho, uma vez que os detalhes da etapa de implementação do modelo podem ser vistos no trabalho de Mercuri (2009).

Dessa forma, reiterando a viabilidade e as vantagens de se utilizar o formalismo proposto, sugere-se, para a continuação do presente trabalho, utilizar diferentes expoentes para as parcelas de perda e ganho de rigidez, desde que fique estabelecido que a influência das variáveis internas no remodelamento ósseo não é linear. Além disso não se pode deixar de verificar a diferenciação das variáveis internas escalares na tração e na compressão.

Sugere-se analisar a aplicação das demais funções de remodelamento propostas no item 5.1, adequando inclusive dois critérios, um mais indicado para tração e outro para a compressão.

Uma outra proposta de continuidade do trabalho é o desenvolvimento do formalismo para um problema tridimensional, seguindo as características da formulação apresentada para os problemas unidimensionais e bidimensionais.

Recomenda-se acrescentar variáveis escalares que possam levar em consideração efeitos biológicos entre outros, no remodelamento ósseo. Ou ainda, ao invés de trabalhar com variáveis internas escalares, procurar estabelecer a formulação para as variáveis tensoriais, que permitem caracterizar a anisotropia do remodelamento ósseo.

Para a aferição de todos esses problemas possíveis sugere-se fazer

diversos ensaios de caracterização do material com o foco na determinação das variáveis internas do remodelamento ósseo, sobretudo na fase de ganho de rigidez, para a qual se tem maiores dificuldades de obtenção de resultados.

Como sugestão adicional de continuidade do trabalho, deve-se também, determinar uma lei que relacione a densidade efetiva com as variáveis internas adotadas para o remodelamento, através de ensaios de laboratórios específicos, para que se possa incluir essa lei no modelo.



## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, F. R.; HECKE, M. B.; MACHADO, R. D.; FRANCO, A. P. G. O. Formulação constitutiva da perda de rigidez das interfaces pino-cimento-dentina no tratamento endodôntico utilizando potenciais termodinâmicos. In: XXIX IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (XXIX CILAMCE), 2008, Maceió. **Anais...**Maceió, CD-ROM.
- BARBERO, E. J.; GRECO, F.; LONETTI, P. Continuum damage-healing mechanics with application to self-healing composites. **International Journal of Damage Mechanics**, v.14, p.51-81, jan. 2005.
- BARBERO, E. J.; DEVIVO, L. A constitutive model for elastic damage in fiber-reinforced PMC laminae. **Journal of Damage Mechanics**, v.10, n.1, p.73-93, 2001.
- BARBERO, E. J.; LONETTI, P. Damage models for composites defined in terms of available data. **Mechanics of Composite Materials and Structures**, v.8, n.4, p.299-315, 2001.
- BARBERO, E. J.; LONETTI, P. An inelastic damage model for fiber reinforced laminates. **Journal of Composite Material**, v.36, n.8, p.941-962, 2002.
- BAYRAKTAR, H. H. et al. Comparison of the elastic and yield properties of human femoral trabecular and cortical bone tissue. **Journal of Biomechanics**. v.37, p.27-35, 2004.
- BENALLAL, A. **Continuous Damage and Fracture**. Elsevier, 2000.
- BODOVILLÉ, G., DE SAXCÉ, G. Plasticity with non-linear kinematic hardening: modeling and shakedown analysis by the bipotential approach, **Eur. J. Mech. A/Solids**, v.20, p.99-112, 2001.
- BULIGA, M.; DE SAXCÉ, G.; VALLÉE, C. Existence and construction of bipotentials for graphs of multivalued laws. **Journal of Convex Analysis**, v.15, n.1, p.87-104,

2008.

BURR, D. B.; MARTIN, R. B.; SCHAFFLER, M. B.; RADIN, E. L. Bone remodeling in response to in vivo fatigue microdamage. **Journal of Biomechanics**, v.18, n.3, p.189–200, 1985.

BURR, D. B. Damage detection and behavior in bone. In: 12<sup>TH</sup> CONFERENCE OF THE EUROPEAN SOCIETY OF BIOMECHANICS, 2000, Dublin. **Anais...** Dublin: Royal Academy of Medicine in Ireland, 2000. p.38–39.

BUSA, B. et al. Rapid establishment of chemical and mechanical properties during lamellar bone formation. **Calcified Tissue International**, v.77, p.386-394, 2005.

CARVALHO, L. M. R.; HECKE, M. B.; ANDRADE-CAMPOS, A.; SIMÕES, J. A. **Um modelo para descrever o movimento ortodôntico dentário. Aspectos teóricos e computacionais.** Artigo submetido ao Prêmio Internacional CESPU 2007 - "Um contributo para o desenvolvimento das ciências e tecnologias da saúde", 2007.

CHABOCHE, J. L. Continuum damage mechanics. Part I: general concepts. Part II: damage growth, crack initiation and crack growth. **Journal of Applied Mechanics**, v.55, p.233-247, 1988.

CHABOCHE, J. L. Cyclic viscoplastic constitutive equations, Part I: A thermodynamically consistent formulation , Part II: Stored energy – comparison between models and experiments. **Journal of Applied Mechanics**. v.60, p.813–821, p.822–828, 1993.

CHEN, W. F. **Plasticity in reinforced concrete**. 5 ed. Boca Raton, FL: J. Ross, 2007.

CONTRAFATTO, L.; CUOMO, M. A new thermodynamically consistent continuum model for hardening plasticity coupled with damage. **Solids and Structures**, v.39, p.6241-6271, 2002.

CONTRAFATTO, L.; CUOMO, M. A framework of elastic-plastic damaging model for concrete under multiaxial stress states. **International Journal of Plasticity**, v.22, p.2272-2300, 2006.

COUSSY, O. **Mechanics of porous media**. Chichester: Wiley, 1995.

COWIN, S. C.; HEGEDUS, D. M. Bone remodeling I: theory of adaptative elasticity. **Journal of Elasticity**, v.6, p.313-325, 1976.

CULLINANE, D. M. et al. Effects of the local mechanical environment on vertebrate tissue differentiation during repair: does repair recapitulate development? **The Journal of Experimental Biology**, v.206, p.2459-2471, abr. 2003.

DOBLARÉ, M.; GARCÍA, J. M. Anisotropic bone remodeling model based on a continuum damage-repair theory. **Journal of Biomechanics**, v.35, p.1-17, sep. 2002.

DOBLARÉ, M.; GARCÍA, J. M.; GÓMEZ, M. J. Modelling bone tissue fracture and healing: a review. **Engineering Fracture Mechanics**, 2004.

EINAV, I.; HOULSBY, G. T.; NGUYEN, G. D. Coupled damage and plasticity models derived from energy and dissipation potentials. **International Journal of Solids and Structures**, v.44, p.2487-2508, 2007.

FANCELLO, E.; PONTHOT, J-P.; STAINIER, L. A variational formulation of constitutive models and updates in non-linear finite viscoelasticity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.65, p.1831-1864, 2006.

FANCELLO, E. et al. A viscoelastic formulation for finite strains: application to brain soft tissue. In: XXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (XXVII CILAMCE), 2006, Belém. **Anais...**Belém, CD-ROM.

FEIJÓO, R. A. Elastic-plastic potencial functionals for rates and increments of stress and strain. **Computational and Applied Mathematics**, v.10, n.3, 1991.

FEIJÓO, R. A.; ZOUAIN, N. Variational Formulations for rates and increments in plasticity. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON COMPUTATIONAL PLASTICITY, 1987, Barcelona. **Anais...**Barcelona, 1987, v.1, p.33-57.

FEIJÓO, R. A.; ZOUAIN, N. Formulations in rates and increments for elastic-plastic analysis. **International Journal for numerical methods in engineering**, v.26, p.2031-2048, 1988.

FROST, H. In Vivo Osteocyte Death, **Journal of Bone and Joint Surgery**, v.42, p.138-143, 1960.

GARCÍA, J. M.; DOBLARÉ, M.; CEGOÑINO, J. Bone remodeling simulation: a tool for implant design. **Computational Materials Science**, v.40, p.1381-1391, 2002.

GROSS, T. S. et al. Strain gradients correlate with sites of periosteal bone formation. **Journal of Bone and Mineral Research**, v.12, n.6, p.982-988, 1997.

HAN, W.; REDDY, B. D. **Plasticity - Mathematical Theory and Numerical Analysis**. USA: Springer-Verlag New York, 1999.

HAZELWOOD, S. J. et al. A mechanistic model for internal bone remodeling exhibits different dynamic responses in disuse and overload. **Journal of Biomechanics**. v.34, p.299-308, 2001.

HECKE, M. B. **Potenciais Generalizados e Otimização na Análise Elasto-Plástica**. Rio de Janeiro, 1991. Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

HECKE, M. B.; TORMENA, F. V.; FARANI, L. A.; CARVALHO, L. M. R.; MACHADO, R.D.; SIMÕES, J. A. **A Damage-remodeling Bone Models Derived from**

**Thermodynamics Pseudo-Potentials.** Aveiro, 2007. Relatório Interno de Pesquisa, Universidade de Aveiro.

HECKE, M. B. et al. A bone remodeling constitutive model using mathematical programming. **Internacional Conference on Engineering Optimization.** Anais do congresso, Rio de Janeiro, 2008.

HERNANDEZ, C. J. **Simulation of bone remodeling during de development and treatment of osteoporosis.** Stanford, 2001. Thesis of PhD. Stanford University.

HIRRIART-URRUTY, J. B.; LEMARECHAL, C. **Convex Analysis and Minimization Algorithms.** Heidelberg: Springer Verlag, 1993.

HJIAJ, M.; FORTIN, M.; DE SAXCÉ, G. A. Complete stress update algorithm for the non-associated Drucker-Prager model including treatment of the apex. **International Journal of Engineering Science**, v. 41, p.1109-1143, 2003.

HOULSBY, G. T. Some Mathematics for the Constitutive Modelling of Soils. In: GEOMATH SYMPOSIUM, 2002, Horton, Greece. **Anais...**Horton, 2002.

HOULSBY, G. T.; PUZRIN A. M. An approach to plasticity based on generalized thermodynamics. In: THE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON HYPOPLASTICITY, 2000. **Anais...** Horton, Greece, 2000.

HSIEH, Y. F.; TURNER, C. H. Effects of loading frequency of mechanically induced bone formation. **Journal of Bone and Mineral Research**, v.16, n.5, p.918-924, 2001.

HUISKES, R. **Simulation of self-organization and functional adaptation in bone.** Berlin: Springer Verlag, 1997.

JACOBS, C. R. et al. Adaptive bone remodeling incorporating simultaneous density and anisotropy considerations. **Journal of Biomechanics**, v.30, n.6, p.603-613, 1997.

KEAVENY, T. M. et al. Application of the Tsai-Wu quadratic multiaxial failure criterion to bovine trabecular bone. **Journal of Biomechanics**. v.121, p.99-107, 1999.

KEAVENY, T. M. et al. Differences between the tensile and compressive strengths of bovine tibial trabecular bone depend on modulus. **Journal of Biomechanics**. v.27, p.1137-1146, 1994.

KOPPERDAHL, D. L.; KEAVENY, T. M. Yield strain behavior of trabecular bone. **Journal of Biomechanics**. v.31, p.601-608, 1998.

KROLL, M. H. Parathyroid Hormone Temporal Effects on Bone Formation and Resorption, **Bulletin of Mathematical Biology**, v.62, p.163–187, 2000.

LEMAITRE, J. **A Course on Damage Mechanics**. 2 ed. Heidelberg: Springer Verlag, 1996.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. **Mechanics of Solid Materials**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

LEE, T. C.; STAINES, A.; TAYLOR, D. Bone adaptation to load: microdamage as a stimulus for bone remodeling. **Journal of Anatomy**, v.201, p.437-446, 2002.

LEE, T. C. et al. Detecting microdamage in bone. **Journal of Anatomy**, v.203, p.161–172, 2003.

LONETTI, P. et al. Interlaminar damage for fiber reinforced polymeric matrix composite. **Journal of Composite Materials**, v.37, n.16, p.1485-1504, 2003.

MAIER, G. Mathematical programming methods in structural analysis. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON VARIATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 1973. **Anais...**Southampton University Press, v.8, p.1-31.

MARTIN, R. B.; BURR, D. B. A hypothetical mechanism for the stimulation of osteonal remodelling by fatigue damage. **Journal of Biomechanics**. v.15, p.137–139, 1982.

MARTIN, R. B. Is all cortical bone remodeling initiated by microdamage? **Bone**. v.30, p.8–13, 2002.

MCNAMARA, L. M.; PRENDERGAST, P. J. Bone remodeling algorithms incorporating both strain and microdamage stimuli. **Journal of Biomechanics**, v.40, p.1381-1391, 2007.

MERCURI, E. G. F. **Modelo computacional para descrever o remodelamento ósseo no movimento ortodôntico usando potenciais termodinâmicos generalizados e otimização**. Curitiba, 2009. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Paraná.

MERCURI, E. G. F.; HECKE, M. B.; LARGURA, L. Z.; TORMENA, F. V. Modelo computacional para descrever o remodelamento ósseo aplicado ao estudo ortodôntico usando potenciais generalizados. In: XXIX IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (XXIX CILAMCE), 2008, Maceió. **Anais...**Maceió, CD-ROM.

MORGAN, E. F.; KEAVENY, T. M. Dependence of yield strain of human trabecular bone on anatomic site. **Journal of Biomechanics**, v.34, p. 569–577, 2001.

MORI, S.; BURR, D. B. Increased intracortical remodeling following fatigue damage. **Bone**, v.14, p.103–109, 1993.

MURAKAMI, S.; KAMIYA, K. Constitutive and damage equations of elastic-brittle material based on irreversible thermodynamics. **International Journal of Mechanical Sciences**, v.39, p.473-486, 1997.

NALLA, R. K. et al. Mechanistic aspects of fracture and R-curve behavior in human cortical bone. **Biomaterials**, v.26, p.217-231, 2005.

NALLA, R. K. et al. Role of microstructure in the aging-related deterioration of the toughness of human cortical bone. **Material Science and Engineering**, v.26, p.1251-1260, 2006.

NCHEUGUIM, E. K. **Theoretical aspects of classical and Drucker-Prager cap models of elastoplasticity**. AIMS Essay, 2006.

NGUYEN, G. D. **A Thermodynamic Approach to Constitutive Modelling of Concrete using Damage Mechanics and Plasticity Theory**. London, 2005. Thesis for degree of doctor of Philosophy. Trinity College, University of Oxford.

NGUYEN, Q. S. **Stability and Nonlinear Solid Mechanics**. John Wiley & Sons Ltd, 2000.

O'BRIEN, F. J.; TAYLOR, D.; LEE, T. C. Bone as a composite material: The role of osteons as barriers to crack growth in compact bone. **International Journal of Fatigue**, v.29, p.1051-1056, 2007.

O'BRIEN, F. J. et al. Visualization of three-dimensional microcracks in compact bone. **Journal of Anatomy**, v.197, p.413–420, 2000.

PRENDERGAST, P. J. Mechanics Applied to Skeletal Ontogeny and Phylogeny, **Meccanica**, v.37, p.317–334, 2002.

PRENDERGAST, P. J.; TAYLOR, D. Prediction of bone adaptation using damage accumulation. **Journal of Biomechanics**, v.27, p.1067–1076, 1994.

PROENÇA, S. P. B. , Fundamentos da Termodinâmica dos Sólidos – Parte I. **Notas de aula**. Curso de Introdução à Mecânica do Dano e Fraturamento. USP – São Carlos, 2000.



RAMTANI, S.; GARCÍA J. M.; DOBLARÉ M. Computer simulation of an adaptive damage-bone remodeling law applied to three unit-bone bars structure. **Computers in Biology and Medicine**, v.34, p.259-273, 2004.

RAMTANI, S.; ZIDI, M. Damage bone remodeling theory: thermodynamical approach. **Mechanics Research Communications**, v.264, n.6, p.701-708, 1999.

RAMTANI, S.; ZIDI, M. A theoretical model of the effect of continuum damage on a bone adaptation model. **Journal of Biomechanics**, v.34, p.471-479, 2001.

REDDY, B. D.; MARTIN, J. B. Algorithms for the solution of internal variable problems in plasticity. **Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.** v.93, p.253-273, 1991.

REINA, J. M. et al. Numerical estimation of bone density and elastic constants distribution in a human mandible. **Journal of Biomechanics**, v.40, p.828-836, 2007.

RINCÓN-KOHLI, L.; ZYSSET, P. K. Multi-axial mechanical properties of human trabecular bone. **Biomech. Model Mechanobiol.** Aug. 9, 2008.

RITCHIE, R. O. et al. Measurement of the toughness of bone: A tutorial with special reference to small animal studies. **Bone**, v.43, p.798-812, 2008.

ROCKAFELLAR, R. T. **Convex Analysis**. USA: Princenton University Press, 1973.

RÜBERG, T. **Computer simulation of adaptive bone remodeling**. Zaragoza, 2003. 107 f. Master Thesis. Centro Politécnico Superior Zaragoza, Technische Universität Braunschweig.

RUIMERMAN, R. Eindhoven, 2005. 101 f. **Modeling and remodeling in bone tissue**. Technische Universiteit Eindhoven.

SAHAR, N. D.; HONG, S.; KOHN, D .H. Micro- and nano-structural analyses of damage in bone. **Micron**, v.36, p.617–629, 2005.

SIMÕES, J. A. Curso de Biomecânica do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial (CPGEI). **Notas de aula**, 2007.

SOUZA, L. A. F. **Modelo numérico de remodelação óssea interna anisotrópico fundamentado na mecânica do dano contínuo**. Curitiba, 2009. Tese de doutorado. Universidade Federal do Paraná.

SOUZA, L. A. F., HECKE, M. B., MACHADO, R. D., TORMENA, F. V. SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE ALGORITMOS DE REMODELAÇÃO ÓSSEA APLICADOS A UMA ESTRUTURAS DE BARRAS: ESTUDO COMPARATIVO. IN: XXIX Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (XXIX CILAMCE), 2008, MACEIÓ. **ANAIS...MACEIÓ**, CD-ROM.

VAN PAEPEGEM, W.; DEGRIECK, J. Calculation of damage-dependent directional failure indices from the Tsai-Wu static failure criterion. **Composites Science and Technology**. v.63, n.2, p.305-310, 2003.

VERNA, C. et al. Microcracks in the alveolar bone following orthodontic tooth movement. a morphological and morphometric study. **European Journal of Orthodonty**. v.26, p.459-467, 2004.

YANG, Q. D.; COX, B.N.; NALLA, R.K.; RITCHIE, R.O. Fracture length scales in human cortical bone: the necessity of nonlinear fracture models. **Biomaterials**, v.27, p.2095-113, 2006.

ZIOUPOS, P.; CASINOS, A. Cumulative damage and the response of human bone in two-step loading fatigue. **Journal of Biomechanics**, v.31, p.825-833, 1998.

ZOUAIN, N.; HECKE, M. B.; FEIJÓO, R. A. **Elastic-Plastic Analysis with Potential Functionals using Internal Variables**. In: COMPUTATIONAL PLASTICITY - FUNDAMENTALS AND APPLICATIONS, 1992, Barcelona. Proceedings of the Third International Conference in Computational Plasticity - Fundamentals and Applications. Swansea : Pineridge Press, p.163-174.

ZYSSET, P.; RINCÓN-KOHLI, L. An alternative fabric-based yield and failure criterion for trabecular bone. In: **Mechanics of Biological Tissue**. Berlin: Springer-Verlag, 2006. p.457-470.

ZYSSET, P. A review of fabric–elasticity relationships for human trabecular bone: theories and experiments. **Journal of Biomechanics**, v.36, p.1469-1485, 2003.

## **APÊNDICE A – FORMALISMO DA TERMODINÂMICA**

### **A.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS**

Na Mecânica dos Meios Contínuos Sólidos considera-se que um sistema termodinâmico é uma quantidade de matéria contínua e invariante. Devido à continuidade é possível considerar sub-sistemas que ocupam volumes muito pequenos. Se for possível definir nesses volume as quantidades médias representativas de: fluxo de calor, temperatura e gradiente de deformação, em qualquer ponto, então as leis relacionadas ao balanço de energia podem ser expressas por formas diferenciais e consideradas válidas num ponto (PROENÇA, 2000).

Um axioma fundamental na termodinâmica dos sólidos é que o sistema possui energia interna, determinada por meio de grandezas físicas mensuráveis ou não denominadas variáveis de estado.

Na termodinâmica dos processos irreversíveis, que é base para a Mecânica do Dano Contínuo, são introduzidos dois potenciais. O potencial de estado, escrito como uma função das variáveis de estado, define as leis de estado. O potencial de dissipação escrito em função das variáveis associadas leva em conta a lei da evolução do fenômeno.

A abordagem termodinâmica para a descrição de um contínuo tem início na hipótese que o estado atual do material pode ser caracterizado por um conjunto seletivo de variáveis de estado.

Qualquer quantidade que depende unicamente das variáveis de estado é chamada de potencial de estado. Algumas das variáveis de estado podem ser observadas no nível macroscópico e controladas do exterior, elas são usualmente chamadas de variáveis observáveis. As demais variáveis de estado caracterizam as mudanças internas do material e são chamadas de variáveis internas, essas não podem ser controladas externamente (LEMAITRE, 1996).

## A.2 DEFINIÇÕES

Segundo Proença (2000), pode-se definir algumas grandezas utilizadas na termodinâmica, conforme apresentado a seguir:

- *Variável de estado*: é toda grandeza física, mensurável direta ou indiretamente, necessária para a determinação da energia interna de um sistema, em qualquer instante;
- *Equilíbrio termodinâmico*: pode-se dizer que um sistema está em equilíbrio termodinâmico se as variáveis de estado não variam no tempo;
- *Processo termodinâmico*: pode-se dizer que um sistema termodinâmico sofre um processo, se pelo menos uma variável de estado sofre variação contínua no tempo;
- *Energia total*: a energia total de um sistema termodinâmico pode ser definida como a soma de várias parcelas, como energia potencial, energia cinética e energia interna;
- *Energia cinética*: é a energia de um sistema que está relacionada ao seu movimento, é dependente do referencial adotado;
- *Energia potencial*: é a energia de um sistema que está relacionada à sua posição ou cota, é dependente do referencial adotado;
- *Energia interna*: é definida como a soma de todas as quantidades de energia contidas em um volume constituinte de um sistema termodinâmico.

As mudanças na energia potencial não serão consideradas nas análises seguintes porque, simplificadamente, as transformações que podem ocorrer no

sistema não alteram significativamente sua cota.

A energia total do sistema pode variar se houver trabalho mecânico realizado em relação ao sistema por meio de forças externas e/ou transferência de calor (PROENÇA, 2000).

### A.3 PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

A primeira lei da termodinâmica é a lei do balanço de energia. Segundo Han e Reddy (1999) essa lei estabelece que para qualquer parte  $\Omega$  do corpo, a taxa de variação da energia interna total mais a taxa de energia cinética é igual à taxa de trabalho realizado naquela parte do corpo pelas forças mecânicas mais a taxa de calor introduzida no sistema.

Dessa forma, para representar a primeira lei, podem-se determinar duas grandezas: a potência mecânica ( $P_{ext}$ ) e a taxa de calor ( $Q_e$ ).

Define-se uma parte do corpo, composta por certa quantidade de massa, que ocupa uma região  $\Omega$  e que está limitada pela superfície externa  $\Gamma$ . A potência mecânica ou potência externa introduzida sobre essa certa quantidade de massa é dada por:

$$P_{ext} = \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (\text{A.1})$$

onde  $\mathbf{t}$  é o vetor de forças por unidade de superfície,  $\mathbf{b}$  é o vetor das forças por unidade de massa em um ponto no interior do domínio,  $\mathbf{v}$  é o vetor velocidade do ponto material, que ocupa a posição  $x$  do espaço de pontos e  $\rho$  é a densidade de massa.

Segundo Proença (2000) o calor pode ser transmitido por condução através da superfície do corpo e/ou introduzido diretamente na massa por irradiação ou por alguma fonte interna.

A taxa de calor introduzida no sistema é dada por:

$$Q_e = - \int_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho r d\Omega \quad (\text{A.2})$$

onde  $\mathbf{q}$  é o vetor fluxo de calor,  $\mathbf{n}$  é o versor que aponta para o exterior do corpo em cada ponto da superfície, versor normal à mesma e  $r$  é a distribuição de calor por

unidade de massa, gerada por uma fonte de calor.

Aplicando o que enuncia a primeira lei da termodinâmica tem-se:

$$P_{ext} + Q_e = \dot{E}_c + \dot{U} \quad (A.3)$$

onde  $\dot{E}_c$  é a taxa de energia cinética e  $\dot{U}$  é a taxa de energia interna.

As taxas de energia são definidas por:

$$\dot{E}_c = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) d\Omega \quad (A.4)$$

$$\dot{U} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho u d\Omega \quad (A.5)$$

considerando  $u$  a densidade de energia interna por unidade de massa.

Substituindo as equações (A.1), (A.2), (A.4) e (A.5) na equação (A.3), tem-se a igualdade:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho r d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \rho u \right) d\Omega \quad (A.6)$$

Do Teorema de Cauchy tem-se que  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  em  $d\Gamma$ , sendo  $\boldsymbol{\sigma}$  o tensor de tensões. Aplicando-se o Teorema da Divergência para determinar a integral de superfície em integral de volume tem-se:

$$P_{ext} = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{v}) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (A.7)$$

como, da análise tensorial,  $\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}$ , então a equação (A.1) passa a ser:

$$P_{ext} = \int_{\Omega} [(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}] d\Omega \quad (A.8)$$

Levando-se em consideração a equação do balanço da quantidade de movimento linear e o princípio da invariabilidade da massa, chega-se a:

$$\int_{\Omega} \left[ \left( \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega \quad (A.9)$$

já considerando o regime de pequenas deformações, com o tensor taxa de deformações definido por  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ .

Assim, a potência externa pode ser escrita como:

$$P_{ext} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega \quad (\text{A.10})$$

a primeira parcela é a taxa de energia cinética e a segunda parcela é denominada potência das tensões.

A equação (A.6) pode então ser escrita como:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho r d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \rho u \right) d\Omega \quad (\text{A.11})$$

Aplicando-se o Teorema da Divergência na parcela de fluxo de calor, para transformar a integral de superfície em integral de volume:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{q} d\Omega \quad (\text{A.12})$$

Assim, a equação (A.11) deve valer para qualquer porção de volume  $\Omega$  do sistema, resultando na forma local para a primeira lei:

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \quad (\text{A.13})$$

#### A.4 SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

A segunda lei da termodinâmica introduz o conceito de entropia do sistema e por meio da imposição de que a variação da entropia deve ser não-negativa, quando ocorre certo processo, acaba restringindo as possibilidades de conversão se o processo em questão é do tipo dissipativo.

De forma bastante simplificada pode-se definir entropia como o grau de desordem assumido pelo sistema em função da quantidade de calor para ele transferida (PROENÇA, 2000).

A entropia associada ao volume  $\Omega$  em cada instante  $t$  é dada por:

$$S = \int_{\Omega} \rho s d\Omega \quad (\text{A.14})$$

onde  $s = s(x, t)$  é a entropia específica por unidade de massa da partícula que ocupa a posição  $x$  na configuração atual do corpo.

A segunda lei enuncia que em processos quaisquer de transformação, inclusive nos processos irreversíveis, a variação total da entropia de um sistema



deve ser igual ou superar a variação provocada pela transferência de calor.

A igualdade vale para os processos reversíveis e a desigualdade para os processos irreversíveis.

A segunda lei é definida por:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} s \rho d\Omega \geq \int_{\Omega} \frac{\rho r}{T} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (\text{A.15})$$

considerando  $T$  a temperatura absoluta, definida como um campo escalar de valores positivos em cada ponto do domínio  $\Omega$ . A primeira parcela do termo da direita da desigualdade representa a entropia suprida pelo exterior e a segunda parcela representa o fluxo de entropia transferido através da superfície  $\Gamma$  para o domínio  $\Omega$ .

A segunda lei estabelece que, ao contrário dos processos reversíveis, nos processos irreversíveis a energia interna não fica totalmente armazenada no sistema, mas parte dela acaba sendo empregada na evolução dos fenômenos internos que geram maior desordem no sistema. Normalmente essa parte da energia interna é denominada energia dissipada.

Aplicando o Teorema da Divergência na equação (A.15) tem-se:

$$\int_{\Omega} \left( \rho \frac{ds}{dt} - \frac{\rho r}{T} + \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) \right) d\Omega \geq 0 \quad (\text{A.15})$$

Assim, a equação (A.15) deve valer para qualquer porção de volume  $\Omega$  do sistema resultando na forma local para a segunda lei:

$$\rho \dot{s} - \frac{\rho r}{T} + \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) \geq 0 \quad (\text{A.16})$$

## A.5 DESIGUALDADE DE CLAUSIUS-DUHEM

A primeira e a segunda lei podem ser combinadas levando a uma desigualdade que deve ser observada para que um processo seja termodinamicamente admissível.

Aplicando-se conceito da análise tensorial para o divergente tem-se:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{T^2} \nabla T \cdot \mathbf{q} \quad (\text{A.17})$$

Substituindo o resultado da equação (A.17) na segunda lei definida na equação (A.16) define-se:

$$\rho \dot{s} - \frac{\rho r}{T} + \frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{T^2} \nabla T \cdot \mathbf{q} \geq 0 \quad (\text{A.18})$$

Fazendo a combinação da equação (A.18) com a primeira lei, equação (A.13) chega-se à desigualdade de Clausius-Duhem:

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \dot{u} + \rho T \dot{s} - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla T \geq 0 \quad (\text{A.19})$$

Segundo Han e Reddy, (1999) é bastante comum na elasticidade e na elastoplasticidade trabalhar com a energia livre de Helmholtz na desigualdade de Clausius-Duhem.

A densidade de energia livre de Helmholtz é definida por:

$$\psi = u - T s \quad (\text{A.20})$$

logo, a desigualdade de Clausius-Duhem escrita em termos da densidade de energia livre de Helmholtz, que é utilizada no presente trabalho é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho(\dot{\psi} + s \dot{T}) - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla T \geq 0 \quad (\text{A.21})$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de tensões,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o tensor de deformações,  $\rho$  representa a densidade de massa,  $\psi$  é a densidade de energia livre de Helmholtz,  $s$  denota a entropia específica,  $T$  é a temperatura absoluta e  $\mathbf{q}$  representa o fluxo de calor.